Nouvelle démonstration et généralisation du théorème binomial d'après M. G. Eisenstein

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 344-347

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__344_0>

NOUVELLE DÉMONSTRATION ET GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME BINOMIAL;

D'APRÈS M. G. EISENSTEIN,
Étudiant (student) à Berlin.

(Journal de M. Crelle, t XXVIII, p. 44, 1844; en allemand.)

Lemme. m et n étant deux nombres positifs entiers, l'expression

$$\frac{p^m - 1}{p^n - 1}$$

se réduit à $\frac{m}{n}$ lorsque $p = 1$.

Soit l'expression

$$(1)\quad \varphi(x, \alpha) = (1 + x)(1 + px)(1 + p^2 x) \ldots (1 + p^{\alpha - 1} x).$$

Elle satisfait évidemment à la relation

$$(2)\qquad (1 + p^\alpha x)\,\varphi(x, \alpha) = (1 + x)\,\varphi(px, \alpha);$$

$\varphi(x, \alpha)$ étant une fonction entière de degré α de x, on a

$$(3)\qquad \varphi(x, \alpha) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots A_\alpha x^\alpha.$$

Il s'agit de déterminer les coefficients. D'abord $A_0 = 1$; ensuite, si l'on met les séries correspondantes à $\varphi(x)$ et $\varphi(px)$ dans la relation (2), on obtient

$$(1 + p^\alpha x) \sum_{t=0}^{t=\alpha} A_t x^t = (1 + x) \sum_{t=0}^{t=\alpha} p^t x^t;$$

et égalant les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, il vient

$$A_t + p^\alpha A_{t-1} = A_t p^t + A_{t-1} p^{t-1};$$

d'où

(4) $$A_t = \frac{p^\alpha - p^{t-1}}{p^t - 1} A_{t-1};$$

par conséquent,

$$A_t = \frac{p^\alpha - p^{t-1}}{p^t - 1} \cdot \frac{p^\alpha - p^{t-2}}{p^{t-1} - 1} \cdots \frac{p^\alpha - 1}{p - 1} \cdot A_0.$$

Si l'on considère que $A_0 = 1$ et que

$$1 + 2 + 3 + \ldots t - 1 = \frac{1}{2} t(t-1),$$

on peut écrire

(5) $$A_t = \frac{p^\alpha - 1}{p - 1} \cdot \frac{p^{\alpha - 1} - 1}{p^2 - 1} \cdots \frac{p^{\alpha - t + 1} - 1}{p^t - 1} \cdot p^{\frac{1}{2} t(t-1)};$$

ainsi, l'on obtient

(6) $$\left\{ \begin{array}{l} (1 + x)(1 + px) \ldots (1 + p^{\alpha - 1} x) \\ = \sum\limits_{t=0}^{t=\alpha} A_t x^t = \sum\limits_{t=0}^{t=\alpha} \frac{p^\alpha - 1}{p - 1} \cdot \frac{p^{\alpha - 1} - 1}{p^2 - 1} \cdots p^{\frac{1}{2} t(t-1)} x^t. \end{array} \right.$$

Faisant $p = 1$, le premier membre devient $(1 + x)^\alpha$, tandis que le coefficient général A_t, d'après le lemme, est

$$\frac{\alpha}{1} \cdot \frac{\alpha - 1}{2} \cdot \frac{\alpha - 2}{3} \cdot \ \cdot \frac{(\alpha - t + 1)}{t};$$

donc

(7) $$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1 . 2} x^2 + \ldots x^\alpha.$$

On voit, par cet exemple, combien il est convenable de considérer les expressions comme des *cas* particuliers d'autres cas plus *généraux*. Par l'introduction de la nouvelle variable p, il a été possible d'établir la relation (2), laquelle, pour le cas spécial $p = 1$, ne donne qu'une identité.

Les coefficients A_t, qui sont derechef de la forme $\varphi(x)$, jouissent des mêmes propriétés que les coefficients binomiaux, et les renferment, comme on a vu, comme cas particuliers.

Soient α et β deux nombres entiers positifs, on a la relation

$$\varphi(x, \alpha+\beta) = \varphi(x, \alpha)\, \varphi(p^\alpha x, \beta);$$

en effet,

$$\begin{aligned}&(1+x)(1+px)\ldots(1+p^{\alpha+\beta-1}x)\\ &= [(1+x)(1+px)\ldots(1+p^{\alpha-1}x)]\\ &\times [(1+p^\alpha x)(1+p.p^\alpha x)\ldots(1+p^{\beta-1}p^\alpha x)].\end{aligned}$$

Si l'on remplace les trois fonctions φ par leurs valeurs en série déduites de (6), et comparant les coefficients, on obtient

$$(8)\qquad C_t = A_t + A_{t-1}B_1 p^\alpha + A_{t-2}B_2 p^{2\alpha} + \ldots + B_t p^{t\alpha};$$

B_t et C_t sont ce que devient A_t en y remplaçant successivement α par β et $\alpha+\beta$.

Si dans l'équation (8) on pose partout $p^\alpha = u$ et $p^\beta = v$, les deux membres deviennent des fonctions entières de u et de v, et α et β n'apparaissent plus, si ce n'est *implicitement* dans u et v. Faisant passer tous les termes dans un seul membre, on a une fonction *entière* de u et de v qui *disparaît* pour un nombre *infini* de valeurs des deux variables (correspondantes aux valeurs positives de α et β); aussi cette fonction doit s'annuler *identiquement*, c'est-à-dire pour toute valeur de u et de v (*). Ainsi l'existence de la formule (8) est démontrée pour chaque valeur de α et β. En généralisant l'expression de $\varphi(x, \alpha)$, et

(*) Il suffit même, pour qu'une fonction entière disparaisse, qu'elle s'annule pour un nombre de valeurs des variables surpassant d'une unité le degré de la fonction.

désignant par ce symbole la série $\sum_{t=0}^{t=\infty} A_t x^t$, pour une valeur quelconque de α (lorsque la série est convergente), alors il suit, en remontant, que la relation

$$\varphi(x, \alpha + \beta) = \varphi(x, \alpha)\,\varphi(p^\alpha x, \beta) \tag{9}$$

n'existe pas seulement pour des valeurs entières, mais aussi pour des valeurs quelconques de α et β, et de là, en posant $p = 1$, on conclut que la série

$$1 + \frac{\alpha}{1} x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{1.2} x^2 + \frac{\alpha.\alpha - 1.\alpha - 2}{1.2.3} x^3 + \ldots = \psi(\alpha)$$

satisfait, pour des valeurs quelconques de α et φ, à la relation

$$\psi(\alpha + \beta) = \psi(\alpha)\,\psi(\beta). \tag{10}$$

Au moyen des propositions connues, cette relation donne la démonstration du *théorème binomial général* pour des exposants quelconques.