NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CAMILLO MINARELLI

Théorie des parallèles

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 312-314

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__312_1>

THÉORIE DES PARALLÈLES;

PAR M. CAMILLO MINARELLI (**).

1. *Lemme.* La somme des trois angles d'un triangle ne peut jamais surpasser deux angles droits.

Démonstration. Legendre a donné une démonstration rigoureuse, aujourd'hui bien connue, dès la première édition de sa *Géométrie.*

Corollaire. La somme des quatre angles d'un quadrilatère ne peut dépasser quatre angles droits.

2. *Lemme.* Étant donné un trapèze ABCD, rectangle en A et B, si $AD > BC$, l'angle en D est aigu.

Démonstration. Prolongeons BC jusqu'en E, de manière que l'on ait $BC + CE = AD$, et menons DE; les deux angles ADE, DEB sont évidemment égaux, et, par conséquent, non obtus, d'après le corollaire précédent; donc, à plus forte raison, $ADC < ADE$ est aigu. C. Q. F. D.

(*) Pour les hebraisants : *Aschre baal hamispar lo kore bsphorim; ha kol jimtsa.*

(**) Communiquee par M. Angelo Genocchi, de Turin.

3. *Lemme.* Une des trois hauteurs d'un triangle tombe dans l'intérieur du triangle.

Démonstration. Tout triangle a au moins deux angles aigus; par conséquent, la hauteur qui part du sommet du troisième angle tombe dans l'intérieur.

4. *Lemme.* La somme des trois angles d'un triangle est égale à deux angles droits.

Démonstration. Soit ABC (*fig.* 18, *Pl. II*) un triangle donné, et BE la hauteur qui tombe dans l'intérieur. Prolongeons la base AC, et construisons une suite indéfinie de triangles CB_1C_1, $C_1B_2C_2$, $C_2B_3C_3$, etc., égaux au triangle ABC; de sorte que l'on ait $AC = CC_1$, $CB_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, et ainsi des autres. En A, élevons à AC une perpendiculaire $AD > BE$, et en D une perpendiculaire DK à AD; menant DB, l'angle ADB est aigu (lemme 2); de même, si l'on menait DB_1, DB_2, etc.; donc la droite DK ne peut entrer dans aucun des triangles ABC, CB_1C_1, $C_1B_2C_2$, etc. Joignons les sommets B, B_1, B_2, etc., par des droites BB_1, B_1B_2, etc. Prenons sur la droite DK des points quelconques D_1, D_2, D_3, etc. (*), menons D_1B, D_1B_1, D_2B_1, D_2B_2, etc. Cela posé, représentons par R l'angle droit, et supposons que la somme des trois angles du triangle ABC soit égale à $2R - \delta$; le pentagone ADD_1B_1C renferme cinq triangles ABD, DBD_1, BD_1B_1, BCB_1, ABC; la somme des quinze angles de ces triangles ne peut dépasser $10R - \delta$ (lemme 1). Les angles autour de B valent quatre droits; donc la somme des cinq angles du pentagone C ne peut dépasser $6R - \delta$.

Considérons maintenant le pentagone $ADD_2B_2C_1$; ajoutons aux angles du premier pentagone ceux du triangle CB_1C_1, et ensuite ceux des triangles $D_1B_1D_2$, $B_1D_2B_2$,

(*) On peut prendre pour D_1, D_2, etc., les pieds des perpendiculaires abaissées de B, B_1, etc., sur DK.

$B_1C_1B_2$, la somme totale sera moindre que $14R - 2\delta$; mais les angles en D_1, en B_1 et en C valent ensemble 8R, donc la somme des cinq angles du second pentagone est inférieure à $6R - 2\delta$. On démontrera de même que la somme des angles du troisième pentagone $ADD_3B_3C_2$ est moindre que $6R - 3\delta$; et pour le n^{ieme} pentagone, la somme des angles sera moindre que $6R - n\delta$. Or n croissant, $n\delta$ finira par surpasser 6R, et, par conséquent, on parviendrait à un pentagone dont la somme des angles serait négative; résultat absurde; donc δ est nul, et la somme des angles du triangle ABC est égale à deux droits. C. Q. F. D.

5. Théorème. *Deux droites parallèles étant coupées par une sécante, les angles alternes-internes sont égaux.*

Démonstration. Elle est fondée sur le lemme précédent. Consultez les premières éditions de la *Géométrie* de Legendre.