NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Sur les polyèdres étoilés. D’après M. Cauchy

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 304-312

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__304_1>

SUR LES POLYÈDRES ÉTOILÉS

(Voir p. 132),

D'APRÈS M. CAUCHY.

(Journal de l'École Polytechnique, XVIe cahier, p. 68; 1813) [*].

1. « Est-il possible qu'il existe des polyèdres réguliers » dont le nombre des faces ne serait pas un de ceux-ci, » 4, 6, 8, 12, 20? Voilà une question qui mériterait » d'être approfondie, et qu'il ne paraît pas facile de » résoudre en toute rigueur. » (Poinsot, *Journal de l'École Polytechnique*, Xe cahier.)

L'objet de la première partie du Mémoire de M. Cauchy, la seule dont nous nous occuperons, est de répondre à cette question de M. Poinsot, et de prouver qu'il ne peut

[*] Lu à la première classe de l'Institut, en 1811.

existier que neuf polyèdres réguliers, savoir : les cinq anciens, les deux de Kepler et les deux de M. Poinsot.

2. M. Cauchy, au § 15 de son Mémoire, fait l'observation qu'on peut former tous les polygones d'espèces supérieures en prolongeant les côtés des polygones réguliers de première espèce. Ajoutons que cette observation a été faite pour la première fois par Kepler. Or, dit M. Cauchy, les polyèdres d'espèces supérieures dérivent d'une manière analogue des polyèdres réguliers de première espèce, et l'on peut former tous les nouveaux polyèdres réguliers en prolongeant les arêtes ou les faces des polyèdres réguliers déjà connus. Cette observation sert de base à la démonstration.

3. *Définition*. Un polyèdre régulier d'une espèce quelconque est celui qui est formé par des polygones égaux et réguliers, également inclinés l'un sur l'autre, assemblés en même nombre autour de chaque sommet.

4. « Soient deux polyèdres réguliers égaux; si l'on » désigne par des n^{os} 1, 2, 3, 4, etc., les faces correspondantes des deux polyèdres, on pourra faire coïncider le second polyèdre avec le premier, en plaçant » l'une quelconque des faces du second sur une face déterminée du premier, par exemple sur la face n^o 1 du » premier, et en commençant par faire coïncider dans » ces deux faces deux quelconques de leurs arêtes. Réciproquement, si deux polyèdres égaux satisfont à la condition précédente, on pourra en conclure avec sûreté » qu'ils sont réguliers : car, puisqu'on pourra faire alors » coïncider chacune des faces du second avec une face déterminée du premier, en commençant par faire coïncider deux arêtes quelconques de ces deux faces, il » s'ensuivra que les différentes faces sont des polygones » égaux et réguliers; et puisqu'en faisant coïncider deux » faces quelconques, prises à volonté, on fait coïncider

» toutes les autres, on en conclura que les différents an-
» gles dièdres sont égaux, ou, ce qui revient au même,
» que les faces sont également inclinées l'une à l'autre,
» et assemblées en même nombre autour de chaque
» sommet. »

5. *Définition*. Un polygone *semi-régulier* est celui qui a $2n$ côtés tels, que les côtés de rang $1, 3, 5, \ldots 2n-1$ soient égaux; de même, les côtés de rang $2, 4 \ldots 2n$; et que les côtés $1, 2, 3 \ldots n$ soient respectivement parallèles aux côtés $n+1, n+2, \ldots, 2n$.

6. Il y a n manières d'opérer la coïncidence de deux polygones réguliers de n côtés, et autant de manières pour opérer la coïncidence de deux polygones semi-réguliers de $2n$ côtés.

7. Tout ce qui précède est invoqué par M. Cauchy pour démontrer un fait déjà remarqué aussi, comme nous verrons, par Kepler. En se transportant par la pensée au centre d'un polyèdre régulier d'espèce supérieure, les plans qui comprennent les différentes faces du polyèdre présenteront à l'observateur la forme d'un polyèdre convexe de première espèce, qui lui sert comme de noyau, et ce polyèdre est *régulier*. « En effet, construisons un
» second polyèdre d'espèce supérieure égal au premier;
» vous construirez en même temps un second polyèdre
» de première espèce, égal à celui qui formait le *noyau*
» du polyèdre régulier donné; désignez maintenant par
» des nos 1, 2, 3, etc , les différentes faces correspondantes
» des deux polyèdres d'espèce supérieure, et par les
» mêmes nos 1, 2, 3, etc., les faces des polyèdres de pre-
» mière espèce qui sont renfermées dans les mêmes plans
» que celles affectées de ces numéros dans les polyèdres
» d'espèce supérieure. De quelque manière que vous
» fassiez coïncider les polyèdres d'espèce supérieure, les
» deux polyèdres de même espèce, compris sous les mêmes

» faces, coïncideront aussi.....» Par suite (4), les différentes faces des deux polyèdres *noyaux* sont toutes égales entre elles, également inclinées l'une sur l'autre, et assemblées en même nombre autour de chaque sommet. Supposons que le nombre des côtés de chaque face soit égal à n dans les deux polyèdres d'espèce supérieure; il y a donc n manières d'opérer la coïncidence de deux faces de ces polyèdres, et, par conséquent, aussi n manières d'opérer la coïncidence des faces correspondantes des deux polyèdres de première espèce; ces faces sont donc ou des polygones réguliers de n côtés ou semi-réguliers de $2n$ côtés (6); mais n étant au moins égal à 3, $2n$ est au moins égal à 6. Mais il est impossible de former un polyèdre de première espèce dont toutes les faces auraient au moins six côtés; donc les faces du noyau sont des polygones réguliers, et ce noyau est un polyèdre régulier de première espèce.

8. « Ainsi, il est donc prouvé que dans un ordre quel-
» conque on ne peut construire de polyèdres réguliers
» d'espèce supérieure qu'autant qu'ils résultent du pro-
» longement des arêtes ou des faces des polyèdres réguliers
» de même ordre et de première espèce qui leur servent de
» noyau; et que, dans chaque ordre, les faces des polyèdres
» d'espèce supérieure doivent avoir le même nombre de
» côtés que celles des polyèdres de première espèce. »

Examinons donc, sous ce point de vue, les cinq polyèdres réguliers de première espèce.

9. *Tétraèdre*. Il n'existe qu'une espèce de triangle; on ne peut donc obtenir de nouvelles faces par le prolongement des arêtes. Chacune des faces est voisine des trois autres; on ne peut donc obtenir de nouvelles faces par le prolongement des faces. Il n'existe donc qu'une espèce de tétraèdre.

10. *Hexaèdre*. Il n'existe qu'une espèce de carré; de

plus, les faces qui ne sont pas voisines sont parallèles, par conséquent ne peuvent se rencontrer. Il n'existe donc qu'une espèce d'hexaèdre.

11. *Octaèdre.* Il n'existe qu'une espèce de triangle, chaque face prolongée rencontre trois autres qui ne sont ni voisines ni parallèles; on obtient ainsi huit triangles équilatéraux, mais qui ne forment pas un octaèdre régulier, mais un solide double formé par deux tétraèdres qui se traversent mutuellement. C'est ainsi que l'hexagone donne un triangle double (*voir* p. 136).

12. *Dodécaèdre.* 1°. En prolongeant les côtés de douze pentagones, on obtient un dodécaèdre régulier de seconde espèce (*voir* p. 134, § 13).

2°. Chaque face rencontre les cinq plans qui avoisinent la face parallèle opposée; les deux intersections forment deux pentagones réguliers de première et de deuxième espèce, et on obtient ainsi un dodécaèdre de troisième et de quatrème espèce (*voir* p. 134).

13. *Icosaèdre.* Comme il n'y a qu'une espèce de triangle, il n'y a pas lieu à des prolongements d'arêtes. Considérons donc la face F et la face F′ parallèles et opposées; les *dix-huit* triangles restants se distribuent ainsi :

(*a*) Trois triangles ayant une arête commune avec F;

(*b*) Trois triangles ayant une arête commune avec F′;

(*c*) Six triangles n'ayant qu'un angle commun avec F et se partageant en deux groupes (1, 3, 5), (2, 4, 6); dans chacun les triangles sont également inclinés l'un sur l'autre;

(*d*) Six triangles n'ayant qu'un sommet en commun avec F′, et se divisant de même en deux groupes (1, 3, 5), (2, 4, 6) formés respectivement de triangles également inclinés l'un sur l'autre.

Examinons les intersections de F avec ces systèmes de triangles. Le système (*a*) ne donne rien, le système (*b*) fournit un triangle, et chaque face donnant lieu à un triangle, on formera ainsi l'icosaèdre de septième espèce (*voir* p. 134, 1°); chaque groupe du système (*c*) fournit un triangle circonscrit au triangle F; mais huit faces seulement donnent des triangles différents; de sorte qu'on construit ainsi un octaèdre régulier de première espèce. En suivant le système (*d*), on ne peut passer que sur quatre faces, et l'on construit un tétraèdre régulier.

14. Il est donc démontré qu'il n'existe que quatre polyèdres réguliers d'espèce supérieure.

15. Problème. *Connaissant les angles que forment deux faces adjacentes dans le tétraèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre de première espèce, trouver l'angle compris entre deux faces quelconques d'un polyèdre régulier?*

Solution. Soient α, β, γ, ces trois angles.

1°. *Tétraèdre.* On a α pour deux faces quelconques.

2°. *Hexaèdre.* L'angle compris entre deux faces est nul ou droit.

3°. *Octaèdre.* 1° Deux faces adjacentes, l'angle compris est $\pi - \alpha$; 2° deux faces non adjacentes, α; 3° deux faces parallèles.

4°. *Dodécaèdre.* 1° Deux faces parallèles; 2° β, pour deux faces adjacentes; 3° $\pi - \beta$, pour deux faces non adjacentes.

5°. *Icosaèdre.* 1° Deux faces parallèles; 2° γ, pour deux faces adjacentes; 3° $\pi - \gamma$, une face et celles qui avoisinent la face opposée; 4° l'angle compris entre deux faces dont l'une n'est pas adjacente à l'autre, ni à la face opposée, sera représenté par α ou par $\pi - \alpha$.

Cette solution est fondée sur les constructions indiquées dans les paragraphes 9, 10, 11, 12, 13.

Nous allons transcrire *in extenso* la prop. XXVI, lib II, des *Harmonices Mundi.*

XXVI. Propositio. *Addi possunt congruentiis per-*

fectissimis regularibus, duæ etiam aliæ congruentiæ, stellarum duodecim planarum pentagonicarum; et duæ semisolidæ, stellarum octangulæ et decangulæ.

Claudunt enim pentagonicæ solidas figuras aculeatas undique; quarum una fit duodecim angularum quinquelinearium, altera viginti angularum trilinearium : illa trinis angulis insistit, hæc quinis simul; illa pulchrius super angulum erigitur, hæc rectius sedet, incumbens in quinos. In his etsi forinsecus non apparet regulare planum, sed ejus loco triangulum æquicrurum pentagonicum; quina tamen hujusmodi semper in unum idemque planum competentia, occultum sub soliditate quinquangulum, veluti cor suum (*) circumstant; faciuntque cum eo dictam stellam pentagonicam, seu germanico idiomate, pedem-Truitæ, Theophrasto Paracelso signum sanitatis. Idea corporis quodammodo eadem est, quæ sui plani; nam ut in hoc, scilicet in stella quinquangula, binorum semper triangulorum latera in unam rectam competunt, quæ parte sui interiore fit basis uni exteriori triangulo, latus vero intimo quinquangulo; sic in solido, semper quinorum solidorum angulorum triangula singula æquicrura, competunt in unam planitiem, quorum quinque triangulorum seu stellæ intima medulla et cor, quinquangulum, fit basis in una superstantis anguli solidi; vel in altera, superstantium quinque solidorum. Est autem tanta cognatio harum figurarum, unius cum dodecaedro, alterius cum icosaedro, ut videantur hæ, præsertim dodecaedron, trunca quodammodo et mutila, si cum illis aculeatis comparentur.

Le reste est relatif à des solides demi-réguliers.

On voit que Kepler déduit un polyèdre étoilé de l'icosaèdre ordinaire, et un seul aussi du dodécaèdre, savoir : le dodé-

(*) C'est le noyau dont parle M. Cauchy.

caèdre étoilé de troisième espèce; en ayant égard aux pentagones étoilés, il aurait pu déduire encore deux autres dodécaèdres étoilés du dodécaèdre ordinaire. Peut-être qu'il n'a pas voulu le faire, afin de ne pas troubler ses relations imaginaires entre les corps géométriques et les corps célestes. Il lui fallait un certain nombre de corps réguliers et pas davantage. Quoi qu'il en soit, c'est à M. Poinsot que nous devons la connaissance de deux nouveaux dodécaèdres étoilés. On a lieu d'être surpris que le célèbre géomètre ne fasse aucune mention de Kepler, auteur de la doctrine des polyèdres étoilés. La surprise est d'autant plus fondée que M. Poinsot cite un passage des *Harmonices*; il est vrai que ce n'est que la citation d'une citation, car Lidonne, mentionné dans le Mémoire de M. Poinsot, rapporte le même passage. Sachant qu'un géomètre, ayant nom Kepler, avait traité un sujet semblable, comment n'a-t-on pas la *curiosité* de consulter l'ouvrage?

Pour faire diversion, nous terminerons ce long exposé par quelques observations philologiques, qui, nous en convenons, n'ont pas le moindre rapport avec le sujet. Les Psaumes commencent par *Aschré*; ce mot hébreu, qu'on rencontre rarement, est d'une signification douteuse. On convient généralement de traduire ce mot par *beatus*; la forme étant celle d'un substantif pluriel *construit*, *felicitates* serait plus exact. Toutefois, voici le sens des premiers versets : *heureux celui qui ne va pas aux conciliabules des mauvaises gens, qui n'assiste pas aux réunions des pervers, qui ne siége pas aux séances des gens de rien, ne respectant rien* (*); *il sera comme l'arbre planté sur le bord des eaux, dont le feuillage ne se flétrit pas.* En d'autres termes : celui qui ne fré-

(*) C'est le sens *développé* du mot *Letsime*.

quente pas de mauvaises sociétés ne se corrompra pas. Cette admonition, faite il y a quelques milliers d'années, est encore utile aujourd'hui, et peut avoir, comme parlent nos Welches, un intérêt d'actualité.

On trouve dans la même collection encore d'autres pensées de ce genre, où l'on félicite ceux qui font telles actions et pas telles autres. Jadis, par forme d'exercice, j'ai essayé d'écrire en hébreu un psaume à l'usage des géomètres. Voici le premier verset: *Beatus mathematicus qui procul libris nihil legit; omnia inveniet* (*).