Nouvelles annales de mathématiques

Questions d'examen d'admission à l'École polytechnique en 1848

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 300-304

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__300_0>

QUESTIONS D'EXAMEN D'ADMISSION A L'ECOLE POLYTECHNIQUE EN 1848

(Voir p 220)

---

51. On donne un cercle et une corde AB dans ce cercle, du centre C on mène un rayon CD qui coupe la corde ou son prolongement en F. Trouver le lieu des points M milieux des segments FD; donner à priori la tangente en A et en B (*voir* t. VI, p. 202).

52. Etant données quatre droites dans l'espace, déterminer le plan sur lequel leurs projections formeraient un parallélogramme.

53. Lieu des centres des cercles circonscrits aux triangles rectangles formés en menant d'un point donné M des sécantes à un angle droit YOX (évidemment une conique)

54. De tous les segments appartenant à une même sphère et ayant même hauteur, quel est le maximum? (*Voir* t. I, Cirodde, et t. V, p. 537.)

55. De toutes les zones de même surface et à une seule base, quelle est celle qui donne le plus grand segment sphérique.

56. Le côté du décagone régulier est égal à la hauteur du cône ayant son sommet au centre de la sphère, et équivalent au segment sphérique de même base.

57. Trouver la surface du triangle, en la considérant comme limite de rectangles dont la hauteur serait le $\frac{1}{n}$ de celle du triangle; trouver le volume de la pyramide, du cône et de la sphère, en les considérant comme limites de cylindres dont la hauteur est le $\frac{1}{n}$ de celle de la pyramide ou de celle du cône, ou du rayon (*voir* t. V, p. 348).

58. Par le foyer d'une ellipse on mène trois rayons vecteurs formant deux à deux un angle de 120 degrés; démontrer que $\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}=$ constante (*voir* t. VI, p. 162).

59. Trois mobiles partent des points A, B, C avec des vitesses r, r', r''; à quel moment un des trois sera-t-il à égale distance des deux autres? (*Voir* t. VI, p. 401.)

60. Démontrer que

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n+1}{2n+3}.$$

(Si c'est vrai pour n, c'est vrai aussi pour $n+1$.)

61. On donne, par leurs projections, une droite et un point sur cette droite; on propose de déterminer une deuxième droite telle, que la première, tournant autour de la seconde, puisse devenir parallèle à la ligne de terre.

62. Si deux arcs tendent vers zéro, la limite de leur rapport est celui de leurs cordes.

63. Rayon de la sphère sur laquelle un triangle sphérique dont les angles sont $A=60°$, $B=120°$, $C=48°$ a 3 mètres carrés de surface.

64. Déterminer, s'il y a lieu, une hyperbole équilatère dont on donne une tangente et une asymptote. (Équation, $\beta\alpha y+\beta^2\cos^2\gamma x^2+4\beta\lambda\cos\gamma x+\lambda^2=0$; axes, asymptote et tangente.)

65. Équation de la courbe qui coupe en moyenne et extrême raison toutes les cordes parallèles d'une parabole donnée (*voir* t. VI, p. 28).

66. $x^2-2x\cos\alpha+1=0$; $x^{2n}-2x^n\cos(n\alpha)+1=0$; toute solution de la première équation est-elle solution de la seconde? (*Voir* t. II, p. 5, et t. IV, p. 57.)

67. En chaque point d'un petit cercle d'une sphère on lui mène un grand cercle tangent, à partir du point de

contact M, on prend sur ce grand cercle un arc $MP = 90°$; trouver le lieu du point P (*voir* t. VII, p. 152).

68. Deux grandeurs qui n'ont pas de commune mesure peuvent-elles avoir un commun multiple?

69. D'un point d'une circonférence, avec un rayon égal au côté du carré inscrit, on décrit une circonférence; évaluer la surface comprise entre les deux circonférences.

70. Un solide renfermé entre deux parallélogrammes est-il un parallélipipède?

71. Étant donné un point dans l'espace, déterminer un plan tel, que la somme algébrique des distances des points à ce plan soit minimum. (Plan passant par le centre de gravité.)

72. Lieu des intersections des trois hauteurs dans les triangles ayant même base et même angle au sommet. (Evidemment un cercle.)

73. Si par le foyer F d'une ellipse on mène deux cordes AFB, A'F'B' à angle droit, on a

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{A'B'} = \text{constante}.$$

74. Trouver x, sachant que $\sin 5x = \sin x$ [*voir* t. V, p. 222, 36 (*bis*)].

75. Quel est l'arc à partir duquel l'accroissement du sinus est plus grand que le décroissement du cosinus $\left(\text{à partir de } \frac{\pi}{4}\right)$?

76. Combien y a-t-il de nombres divisibles par B parmi les nombres A, 2A, 3A,... (B − 1)A, BA, les nombres A et B étant quelconques? (*Voir* t. III, p. 343.)

77.

$$\text{arc}\cos x - \text{arc}\cos y = k' \left[\cos k' = xy + \sqrt{1 - x^2}(1 - y^2)\right].$$

78. Volume du parallélipipède oblique dont on a les trois arêtes et leurs angles deux à deux (*voir* t. I, p. 392).

79. $p = \omega$. Que signifie cette équation? Coefficient angulaire de la tangente; construction géométrique de la tangente en un point donné (ω' étant $< 2\pi$, faites $\omega = \omega' \pm 2k\pi$; k entier positif; et *voir* Rispal, t. II, p. 511).

80. Étant donné un tronc quadrangulaire, comment constater que c'est un tronc de pyramide? suffit-il que les bases soient parallèles et semblables?

81. Condition de relation entre les côtés d'un triangle pour qu'un angle soit triple d'un autre (Viète).

82. L'hyperbole est-elle la seule courbe telle, que les segments de toute sécante compris entre la courbe et les asymptotes soient égaux? (Oui, car alors les milieux des cordes parallèles sont sur une même droite.)

83. Le toit d'un édifice a $69^{m},10$ de long sur $27^{m},76$ de large; on veut le soutenir par des colonnes équidistantes et dont la distance est comprise entre 4 et 5 mètres, comment les placer? (*Voir* p. 246.)

84. Reste de la division de $f(x)$ par $x^n \pm a^n$. (Remplacez dans $f(x)$, x^n par $\mp a^n$, le résultat est le reste cherché.)

85. Quelle racine prendre pour solution du problème de la détermination de la profondeur d'un puits, connaissant le temps écoulé entre le moment où on laisse tomber une pierre et celui où l'on entend l'eau choquée? (*Voir* Cournot, *Correspondance entre l'Algèbre et la Géométrie*, p. 87, 1847.)

86. Quadrilatère inscrit, connaissant deux sommets opposés, l'angle de l'un de ces deux sommets et la direction de la droite qui joint les deux autres (*voir* t. VIII, p. 98).

87 Quelle est la valeur de $\dfrac{\sqrt[m]{f(x)} - \sqrt[m]{f(a)}}{\sqrt[n]{\varphi(x)} - \sqrt[n]{\varphi(a)}}$ pour $x = a$? (*Voir* t VII, p. 425.)

88. Trouver le $n^{ième}$ terme du développement de $\frac{1}{1-x-x^2}$ (par décomposition en fractions rationnelles).

89. Que devient la formule fondamentale de trigonométrie sphérique quand le rayon de la sphère devient infini (par réduction en séries)?

90. Démontrer que

$$\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha + \ldots + \cos(2n+1)\alpha = \frac{1}{2},$$

quand $\alpha = \frac{\pi}{2n+3}$ (*voir* t. III, p. 518).

91. Quelle est l'enveloppe de la droite dont la somme des coordonnées à l'origine est constante? (*Voir* t. III, p. 182, et t. VII, p. 277.) Lorsque la relation entre ces coordonnées est du premier ou du second degré, l'enveloppe est une conique.