Nouvelles annales de mathématiques

Lemoine

Théorème de Mœbius. Sur la conique déterminée par cinq points sur un plan

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 298-299

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__298_1>

THÉORÈME DE MŒBIUS. SUR LA CONIQUE DÉTERMINÉE PAR CINQ POINTS SUR UN PLAN

(Voir t. VII, p. 106 et 177.)

PAR M. LEMOINE,
Professeur à Nantes.

Quelque simple que soit la solution donnée par M. Jules Lescurre (t. VII, p. 177), la suivante, je crois, l'est encore plus.

Soient $F = 0$, $F_1 = 0$ les équations des deux paraboles. L'équation générale de toutes les coniques qui passent par les mêmes points sera

$$F + \lambda F_1 = 0.$$

Dans le polynôme F comme dans le polynôme F_1 les termes du second degré, les axes étant d'ailleurs quelconques, doivent former un carré parfait, on aura $F > 0$ pour tout point extérieur à la première parabole, et $F < 0$ pour tout point intérieur. Il en sera de même à l'égard de la seconde. Désignons par α et β les coordonnées du cinquième point, le coefficient λ sera déterminé par la condition

$$F(\alpha,\ \beta) + \lambda F_1(\alpha,\ \beta) = 0,$$

d'où

$$\lambda = -\frac{F(\alpha,\ \beta)}{F_1(a,\ \beta)}.$$

En sorte que λ sera négatif si le cinquième point est à la fois intérieur ou extérieur aux deux paraboles, et il sera positif dans le cas contraire. Or

$$F = (ay + bx)^2 + cy + dx + f = 0,$$
$$F_1 = (a'y + b'x)^2 + c'y + d'x + f' = 0;$$

d'où

$$\begin{aligned} F + \lambda F_1 &= (ay + bx)^2 + \lambda(a'y + b'x)^2 \\ &\quad + (c + \lambda c')y + (d + \lambda d')x + f + \lambda f' \\ &= (a^2 + a'^2\lambda)y^2 + 2(ab + a'b'\lambda)xy + (b^2 + b'^2\lambda)x^2 + \ldots \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(B^2 - 4AC) &= (ab + a'b'\lambda)^2 - (a^2 + a'^2\lambda)(b^2 + b'^2\lambda) \\ &= -(a^2b'^2 + a'^2b^2 - 2abc'b')\lambda = -(ab' - ba')^2.\lambda. \end{aligned}$$

La conique sera donc une hyperbole si λ est négatif, et une ellipse si λ est positif. Le théorème est démontré.