NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FÉLIX LAROCHE

Solution de la question 103, sur les paraboles homofocales

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 297-298

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__297_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 103, SUR LES PARABOLES HOMOFOCALES;

PAR M. FÉLIX LAROCHE,
Élève du lycée de Versailles.

1. *Lemme.* On a trois tangentes à la parabole et qui se coupent deux à deux. Si l'on circonscrit un cercle au triangle ainsi formé, il passera par le foyer.

Réciproquement, si quatre points sont sur une circonférence, on pourra considérer trois d'entre eux comme les sommets d'un triangle formé par trois tangentes à une parabole; parabole dont le foyer sera le quatrième point.

2. *Lemme.* Quand un triangle est inscrit dans une circonférence, si d'un point de la circonférence on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, les trois pieds de ces perpendiculaires seront en ligne droite.

Réciproquement, si l'on a trois points en ligne droite et un point extérieur, on pourra les considérer comme les pieds de trois perpendiculaires abaissées du point extérieur sur les trois côtés d'un triangle inscrit dans un cercle qui passe par le point extérieur.

Donc ce point extérieur pourra être considéré comme le foyer d'une parabole à laquelle seraient tangentes les trois côtés de ce triangle.

3. THÉORÈME. *On a trois paraboles homofocales dont chacune est tangente à deux côtés d'un triangle; on mène à chacune d'elles une tangente perpendiculaire au côté qu'elle ne touche pas; faire voir que les trois lignes ainsi obtenues sont tangentes à une quatrième parabole homofocale aux trois autres.* (Strebor.)

Démonstration. Soient ABC (*fig.* 13, *Pl. II*), un triangle, O le foyer commun aux paraboles. Une des paraboles sera tangente aux côtés c et b; nous connaissons les pieds P'' et P' des perpendiculaires abaissées du foyer sur ces deux tangentes, et, par conséquent, la droite $P''P'$, lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du foyer sur les tangentes.

Concevons la tangente perpendiculaire à a; si du point O on abaisse une perpendiculaire sur cette tangente, elle sera parallèle à a. Donc le pied de cette perpendiculaire se trouvera en m' à la rencontre de $P''P'$ avec une parallèle à a menée par le point O.

En raisonnant de la même manière pour les autres côtés, nous obtiendrons les points analogues m et m'', et le problème revient à démontrer que les trois points m, m', m'' sont en ligne droite (*voir* p. 295).