J.-H. Vincent

Question sur la théorie des fractions continues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 292-295

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__292_1>

QUESTION SUR LA THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES;

PAR M. J.-H. VINCENT,

Professeur au lycée Monge.

Soit $\frac{m}{n}$ une fraction irréductible; les deux termes de la fraction $\frac{km}{kn}$ auront k pour commun diviseur le plus grand, c'est-à-dire que l'opération du plus grand commun diviseur donnera, dans une des divisions successives, k pour diviseur et *zéro* pour reste. D'où il résulte que, si l'on représente par α un nombre très-petit par rapport à k, la fraction $\frac{m}{n}$ sera l'une des réduites de la fraction $\frac{km+\alpha}{kn}$.

Ne s'ensuit-il pas que la division partielle qui donnera cette réduite donnera en même temps α pour reste, puisqu'en faisant $\alpha = 0$, on reproduirait la réduite?

Réponse : NON.

En effet, supposons la réduite $\frac{m}{n}$ précédée de ces deux autres $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, on aura

$$m = m'q + m'', \quad n = n'q + n'';$$

d'où

$$\frac{m}{n} = \frac{m'q + m''}{n'q + n''}.$$

Pour reproduire $\frac{km+\alpha}{kn}$, il suffit de tenir compte du reste correspondant à q; soient r ce reste et d le diviseur: on aura

$$\frac{km+\alpha}{kn}=\frac{m'\left(q+\frac{r}{d}\right)+m''}{n'\left(q+\frac{r}{d}\right)+n''}=\frac{m+\frac{m'r}{d}}{n+\frac{n'r}{d}},$$

ou plutôt

$$\frac{km+\alpha}{kn}=\frac{md+m'r}{nd+n'r}=\frac{m\left(d+\frac{n'r}{n}\right)+\left(m'-\frac{mn'}{n}\right)r}{\left(d+\frac{n'r}{n}\right)};$$

ce qui fait voir, d'abord, que

$$k=d+\frac{n'r}{n}.$$

Ensuite, quant à la quantité

$$m'-\frac{mn'}{n},$$

elle se transforme en

$$\frac{nm'-mn'}{n}=\pm\frac{1}{n};$$

donc

$$\frac{km+\alpha}{kn}=\frac{km\pm\frac{r}{n}}{kn};$$

donc

$$\pm\alpha=\frac{r}{n},$$

d'où

$$r=\pm n\alpha.$$

Soit pour exemple,

$$m=8,\quad n=5,\quad k=600,\quad \alpha=3;$$

d'où

$$\frac{km+\alpha}{kn}=\frac{5283}{3300}=\frac{8.660+3}{5.660}.$$

On trouve, en opérant,

	1	1	1	1	$1+\frac{15}{651}$
5285 1983	3300 1317	1983 666	1317 651	666 15	651
	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$

d'où

$$d=651,\quad r=15,\quad m'=5,\quad n'=3.$$

Vérification :

$$\frac{5\left(1+\frac{15}{651}\right)+3}{3\left(1+\frac{15}{651}\right)+2}=\frac{8.651+5.15}{5\ 651+3.15}=\frac{8\left(651+\frac{3.15}{5}\right)+\frac{15}{5}}{5\left(651+\frac{3.15}{5}\right)}$$

$$=\frac{8(651+9)+3}{5(651+9)}=\frac{8.660+3}{5.660}.$$

Note. Le célèbre Sauveur (J) [*] est le premier qui ait donné une base scientifique à l'acoustique musicale; et ce qu'il y a de fort singulier, c'est que ce physicien avait la voix fausse et l'oreille fausse. On dit même qu'il était sourd. Aussi s'est-il appliqué à transporter l'appréciation des sons, de l'oreille à l'œil, en permettant de compter à vue le nombre absolu de vibrations des corps sonores. Sa découverte fondamentale peut s'énoncer ainsi : Deux corps sonores faisant entendre simultanément deux sons cor-

[*] Né en 1653, à la Flèche, mort en 1716.

respondants à des nombres entiers u et u' de vibrations dans le même temps t; k étant le plus grand commun diviseur de u et u', il se produit un troisième son correspondant à un nombre k de vibrations pendant le même temps t. C'est à tort qu'on attribue cette expérience à Tartini, qui n'a fait que la reproduire, peut-être sans la connaître. Il s'ensuit que, connaissant ce nombre k et le rapport relatif $m : n$ des deux sons, les nombres absolus des vibrations des deux corps pendant le temps t sont km et kn. Cette méthode d'évaluer les nombres absolus de vibrations, due à Sauveur, a été perfectionnée, il y a une quinzaine d'années, par un nommé Scheibel, manufacturier de soieries à Crevelt, en Prusse. M. le professeur Vincent, connu du public géomètre et dans le monde savant par d'importants travaux sur la musique grecque, s'est proposé d'éclaircir par des considérations théoriques la méthode de Scheibel, et il a été amené à résoudre quelques questions sur les fractions continues : celle que l'on vient de lire, et encore une autre, proposée dans les *Nouvelles Annales,* et résolue par M. Vachette (t. VII, p. 13). Pour mieux se préparer à comprendre le Mémoire de l'érudit professeur, on fera bien de lire dans la *Biographie Universelle* les articles SAUVEUR et TARTINI, tous les deux dus à Prony.