GENTIL

Sur le théorème des polaires à deux cercles

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 290-292

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__290_0>

SUR LE THÉORÈME DES POLAIRES A DEUX CERCLES.

P est un point quelconque pris dans le plan de deux cercles donnés; P′ est le point d'intersection des deux polaires de P relativement aux deux cercles; P et P′ sont dits points réciproques: prouver que l'axe radical passe par le milieu de la droite PP′

(Voir p 152),

PAR M. GENTIL,

Chef d'institution, ancien élève de l'École Polytechnique

A l'aide du principe suivant, démontré par M. Poncelet, n° 78, du *Traité des propriétés projectives des figures*, ce théorème devient évident.

« Tous les milieux des cordes de contact qui correspondent à un même point quelconque du plan d'une suite de cercles, ayant une sécante commune (réelle ou idéale), sont distribués sur une nouvelle circonférence, coupant orthogonalement toutes les premières » (et j'ajoute : *passant par ce point*).

Dans le théorème, PP′ est un diamètre d'un cercle coupant orthogonalement les deux cercles donnés, qui a, par conséquent, son centre sur l'axe radical. Donc, etc.

Je crois qu'il est utile de propager des principes comme ceux de M. Poncelet.

Remarque. Si, au lieu de deux cercles, on considère une suite de cercles ayant une corde commune, le point P a toujours la même réciproque P′ par rapport à deux quelconques de ces cercles.

Note. 1°. Soit $Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$; tous les coefficients sont constants, excepté B; toutes ces coniques passent par les mêmes quatre points. Soient x', y' les coordonnées d'un point pris dans le plan des coniques, et x, y les coordonnées d'un point polairement conjugué, on a

$$(1)\quad x = \frac{Lx' - kF'}{L - mF'},\quad y = \frac{Ly' - k'F'}{L - mF'}$$ (*voir* t. II, p. 305),

où

$$F' = Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Dy' + Ex' + F.$$

Pour avoir le lieu du point (x, y), il faut éliminer B entre les deux équations (1). B monte au troisième degré dans le terme mF'; mais en éliminant F', on obtient l'équation

$$(2)\quad m(yx' - xy') + k'(x - x') + k(y' - y) = 0,$$

où B ne monte qu'au second degré. On en déduit

$$B^2 = \frac{B\varphi_1 + \varphi_2}{\varphi_3};$$

φ_1, φ_2, φ_3 sont des fonctions linéaires en x et y; et

$$B^3 = \frac{B\psi_1 + \psi_2}{\psi_1^2}:$$

ψ_1, ψ_2 sont des fonctions du second ordre en x et y. Substituant B^3 et B^2 dans les équations (1), on obtient

$$BP_1 + P_2 = 0;\qquad BQ_1 + Q_2 = 0;$$

P_1, P_2, Q_1, Q_2 étant des fonctions en x, y du troisième degré. Éliminant B, on a une équation du sixième degré en x et y, et qui représente le lieu cherché.

2°. Soit $y^2 + x^2 + Dy + Ex = 0$ l'équation d'un cercle; D est constant et E est variable; tous ces cercles ont deux points en commun. Un calcul facile montre que le lieu est un cercle.

3°. *Parabole.* $(y + Cx)^2 + ry + sC^2x = 0$; r et s sont constants et C est variable; toutes ces paraboles ont trois points en commun. L'équation (2) donne $C = -\frac{y - y'}{x - x'}$: substituant dans l'une quelconque des équations (1), on parvient à une ligne du troisième ordre.