CASIMIR FOUCAULT

Théorèmes sur les polaires

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 286-288

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__286_1>

THÉORÈMES SUR LES POLAIRES;

PAR M. CASIMIR FOUCAULT,
Élève de l'institution Barbet.

THÉOREME I. *Si du centre d'une ellipse ou d'une hyperbole on abaisse une perpendiculaire sur la polaire d'un* *point situé dans le plan de la courbe, le rectangle construit sur cette perpendiculaire et le diamètre conjugué parallèle à la polaire pris dans une courbe semblable concentrique à la première, passant par ce point donné, est constamment équivalent au rectangle des demi-axes de la première courbe.*

Considérons une ellipse; soient P le point donné et ST la polaire du point P. Supposons que dans l'ellipse semblable, concentrique à AA'BB, et passant par le point P, OH soit le conjugué de OP. ON étant perpendiculaire à la polaire ST, il s'agit de démontrer que

$$\mathrm{OH} \times \mathrm{ON} = \text{constante} = ab.$$

En effet, nous représenterons le rapport de similitude par $\mathrm{K}.\mathrm{OH} = b'\mathrm{K}$.

Les deux triangles semblables ONS et OPQ donnent

$$\mathrm{ON} : \mathrm{PQ} :: \mathrm{OS} : \mathrm{OP},$$

ou

$$\mathrm{ON} : a'\mathrm{K} \sin\theta :: \mathrm{OS} : a'\mathrm{KI}.$$

On a

$$\overline{\mathrm{OV}}^2 = \mathrm{OP} \times \mathrm{OS}, \quad \text{ou} \quad a'^2 = a'\mathrm{K}.\mathrm{OS};$$

de là

$$\mathrm{SO} = \frac{a'}{\mathrm{K}},$$

et, par suite,

$$\mathrm{ON} = \frac{a' \sin\theta}{\mathrm{K}}.$$

Donc

$$\mathrm{OH} \times \mathrm{ON} = a'b' \sin\theta = ab. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

THÉORÈME II. *On démontre facilement que le triangle formé en joignant le pôle aux points d'intersection de la polaire est constant lorsque le pôle se meut sur une courbe semblable et concentrique à la première.*

THÉORÈME III. *Le triangle formé en joignant les* *points de contact au centre est aussi constant. On obtient donc un quadrilatère de surface constante qui se décompose en joignant le centre au pôle en deux triangles équivalents et de surface constante.*