NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G.-J. DOSTOR

Intersection de deux cercles. Relation entre la distance des centres, la corde commune et les quatre segments de la ligne des centres. Aire du triangle

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 284-286

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__284_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

INTERSECTION DE DEUX CERCLES.

Relation entre la distance des centres, la corde commune et les quatre segments de la ligne des centres. Aire du triangle ;

Par M. G.-J. DOSTOR,
Docteur ès sciences mathématiques.

Théorème I. *Lorsque deux cercles se coupent, les droites qui joignent les extrémités d'un diamètre de la ligne des centres à un point d'intersection, sont coupées par la seconde circonférence en segments, comptés à partir de ce diamètre, proportionnels entre eux, et dans le rapport de ce diamètre et de la double distance des centres* (fig. 16, Pl. II).

Démonstration.

$$EC : EG :: FC : FH :: EF : 2AB.$$

En effet, l'angle ECF étant droit, son adjacent GCH l'est aussi, et la droite GH passe par le centre B.

Cela étant, du centre B menons sur la corde CH la perpendiculaire BO.

Les deux triangles rectangles CEF, BFO sont semblables et donnent la proportion

$$EC : BO :: FC : FO :: EF : BF;$$

d'où

$$EC : EB + 2\,BO :: FC : FC + 2\,FO :: EF : EF + 2\,BF.$$

Or

$$\begin{aligned} EC + 2\,BO &= EC + CG = EG, \\ FC + 2\,FO &= CO + FO = FH, \\ EF + 2\,BF &= 2\,AF + 2\,BF = 2\,AB; \end{aligned}$$

donc

$$EC : EG :: FC : FH :: EF : 2\,AB.$$

On a de même

$$KC : KM :: LC : LN :: KL : 2\,AB.$$

Corollaire. La comparaison des deux dernières proportions donne

$$\frac{EC}{EG} : \frac{KC}{KM} :: \frac{FC}{FH} : \frac{LC}{LN} :: EF : KL \quad \text{ou} \quad :: AC : BC.$$

THÉORÈME II. *Lorsque deux cercles se coupent, le produit de la distance des centres, par la corde commune, est égal à la racine carrée du produit des quatre segments de la ligne des centres.*

En effet, de la similitude des deux triangles CEF, CFI, on tire

$$EF : EC :: 2\,CF : 2\,CI,$$

d'où

$$\overline{EF}^2 . \overline{CD}^2 = \overline{EC}^2 . 4\,\overline{CF}^2;$$

mais on a, par le théorème précédent,

$$2\,AB.EC = EG.EF,$$
$$2\,AB.FC = FH.EF.$$

Multipliant ces trois égalités membre à membre, et simplifiant, on obtient

$$\overline{AB}^2.\overline{CD}^2 = EC.EG.FC.FH.$$

Or

$$EC.EG = EK.EL, \quad FC.FH = FL.FK;$$

donc

$$AB.CD = \sqrt{EK\ EL.FK.FL}.$$

Corollaire. Posons

$$AB = a, \quad AC = b, \quad BC = c,$$

nous aurons

$$EK = AB + AE + BK = a + b + c,$$
$$EL = EA + AB - BL = b + a - c,$$
$$FK = AB + BK - AF = a + c - b,$$
$$FL = AF + BF - AB = b + c - a,$$

et puisque

$$AB \times CD = 4\ \frac{AB \times CI}{2} = 4\,ABC,$$

il viendra

$$ABC = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)},$$

pour *l'aire du triangle* ABC *en valeur de ses côtés.*