Note sur l'angle droit circonscrit à deux coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 282-284

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__282_1>

NOTE SUR L'ANGLE DROIT CIRCONSCRIT A DEUX CONIQUES.

I. $$\begin{aligned} Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F &= 0, \\ A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' &= 0, \end{aligned}$$

équations de deux coniques, axes rectangulaires;

$y + ex + f = 0$, tangente à la première conique,

$y + e'x + f' = 0$, tangente à la deuxième conique.

Posons

$$P = mx^2 - 2kx + l, \qquad P' = \mu y^2 - 2\pi' y + \lambda',$$
$$Q = ky + k'x + n - mxy, \qquad Q' = \pi y + \pi' x + \nu - \mu xy,$$
$$R = my^2 - 2k'y + l', \qquad R' = \mu x^2 - 2\pi x + \lambda,$$
$$L = AE^2 - BDE + CD^2 + F(B^2 - 4AC),$$
$$k = \frac{dL}{dE}, \quad k' = \frac{dL}{dD}, \quad l = \frac{dL}{dC}, \quad l' = \frac{dL}{dA},$$
$$n = -\frac{dL}{dB}, \quad m = \frac{dL}{dF};$$

les lettres grecques sont relatives à la seconde conique.

Représentons par x et y les coordonnées du point d'intersection des deux tangentes; on a les deux équations de condition qui établissent le contact

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} Pe^2 - 2Qe + R &= 0, \\ R'e'^2 - 2Q'e' + P' &= 0. \end{aligned} \right.$$

Les tangentes formant un angle droit, on a

$$ee' + 1 = 0;$$

donc la dernière équation devient

$$P'e^2 + 2Q'e + R' = 0. \tag{2}$$

Éliminant e, on obtient

$$(RP' - PR')^2 + 4(RQ' + QR')(PQ' + QP') = 0. \tag{3}$$

Le terme le plus élevé de l'équation est $m^2\mu^2(y^2 + x^2)^4$; donc si l'équation n'a pas de facteur rationnel, le lieu géométrique du point d'intersection est toujours du huitième degré, à moins que l'une des coniques ne soit une parabole; car alors m ou μ est nul, et l'équation n'est plus que du sixième degré. Si les deux coniques sont des paraboles, l'équation s'abaisse au quatrième degré. Si l'équation a un facteur rationnel du deuxième degré, il doit être de la forme $A(y^2 + x^2) +$ etc.; donc le lieu géométrique n'admet d'autres coniques que le cercle.

Lorsque les deux coniques se confondent, on a

$$P' = R, \quad Q' = Q, \quad R' = P,$$

et l'équation (3) devient

$$(R + P)^2[(R - P)^2 + 4Q^2] = 0;$$

d'ou

$$R + P = 0,$$

équation du cercle : théorème déjà connu de Pappus.

Éliminant e entre les deux équations (1) et (3), on obtient

$$e^2(PQ' + P'Q + RQ' + R'Q = 0.$$

Si l'on a l'identité

$$PQ' + P'Q = RQ' + R'Q,$$

alors le lieu a pour équation

$$PQ' + P'Q = 0;$$

l'identité donne celle-ci,

$$Q'(P - R) = Q(R' - P).$$

Pour qu'elle subsiste, il faut que k, k', π, π', n, ν deviennent nuls, et que $\frac{l - l'}{m} = \frac{\lambda - \lambda'}{\mu}$, c'est-à-dire il faut que les deux coniques soient homofocales, et le lieu devient

$$m\mu(x^2 + y^2) + l\mu + m\lambda' = 0,$$

équation d'un cercle concentrique aux coniques.

L'équation $RP' - PR' = 0$ amène au même résultat; de même, $RQ' + QR' = 0$.