NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

L. THOMAS

Note sur la plus courte distance de deux points situés sur la surface de la sphère

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 279-281

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__279_1>

NOTE SUR LA PLUS COURTE DISTANCE DE DEUX POINTS SITUÉS SUR LA SURFACE DE LA SPHÈRE;

PAR M. L. THOMAS,
Professeur de mathematiques.

Dans les éléments, pour prouver que, de toutes les lignes tracées sur la surface d'une sphère et terminées aux deux mêmes points, la plus courte est l'arc de grand cercle qui joint ces deux points; on regarde comme évident qu'entre les deux points donnés, il y a toujours une ligne moindre que toutes les autres, et l'on démontre ensuite qu'on peut trouver une ligne plus courte que toute ligne qui diffère de l'arc de grand cercle. Le postulatum n'est pas admissible dans toute sa généralité, puisque, pour unir les deux extrémités d'un même diamètre, il n'y a aucune ligne moindre que toutes les autres, il y en a une infinité d'également courtes. De plus, le mode de démonstration employé ne pouvant s'appliquer à l'arc de grand cercle, pour être logique, il faudrait, avant de conclure, faire voir que, par aucun autre tour de démonstration, on ne parviendra à prouver que l'arc de grand cercle n'admet pas de ligne plus courte que lui-même.

Il y a de ce théorème une démonstration directe, plus simple et qui me semble très-rigoureuse; la voici :

Soient AMB (*fig.* 15, *Pl. II*) l'arc de grand cercle et AFIB une autre ligne quelconque terminée aux deux mêmes points A et B sur la surface d'une sphère donnée; il s'agit de prouver que la longueur de l'arc AMB est moindre que la longueur de la ligne AFIB.

Soient C, D, E des points de cette dernière; joignons-les entre eux, et aux points A et B par les arcs des grands cercles AC, CD, DE, EB, et tirons, en outre, les arcs de grands cercles AD, AE. Les triangles sphériques ABE, AED, ADC, donnent les inégalités

$$\begin{aligned} \text{arc AMB} &< \text{AE} + \text{BE}, \\ \text{AE} &< \text{AD} + \text{DE}, \\ \text{AD} &< \text{DC} + \text{AC}. \end{aligned}$$

Additionnons-les membre à membre et supprimons les termes communs aux deux membres du résultat; il vient

$$\text{AMB} < \text{BE} + \text{DE} + \text{DC} + \text{AC}.$$

La conclusion est la même, quelque nombreux et rapprochés que soient les points A, C, D, E, B choisis sur la ligne AFIB; donc elle a encore lieu à la limite, lorsque les points sont infiniment nombreux et infiniment rapprochés. Or la limite de la somme des arcs de grands cercles, BE, DE, DC, etc., est alors la même que la limite de la somme de leurs cordes, c'est-à-dire que la limite vers laquelle tend la somme des côtés d'un polygone inscrit dans la courbe AFIB; mais, par définition, cette dernière limite est la longueur de l'arc de courbe AFIB. Donc, etc.

Note. AB étant une ligne tracée sur une surface quelconque, si, par tous les points de cette ligne, on mène des plans tangents à la surface, on obtient une surface développable; si, en développant cette surface, la ligne AB devient une droite, alors cette ligne est évidemment géodésique; caractère qui sur la sphère n'appartient qu'aux grands cercles. Il est vrai que ce genre de considérations ne peut être présenté aux élèves lorsqu'ils ne font qu'aborder la sphère ; mais il est utile de les en instruire le plus tôt possible. L'occasion de *généraliser* ne doit jamais être négligée ; car l'esprit de la science consiste dans la généralisation, qui agrandit et facilite tout. TM.