NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SERRET

Démonstration des théorèmes de M. Strebor sur les hyperboles équilatères concentriques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 271-279

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__271_1>

DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES DE M. STREBOR SUR LES HYPERBOLES ÉQUILATÈRES CONCENTRIQUES.

(Voir t VII, p 240 et 245 questions 176 et 190)

PAR M. PAUL SERRET.

1. *Lemme* I. Si, dans l'équation d'une droite en coordonnées polaires, $\rho = \frac{b}{\sin\omega - a\cos\omega}$, on remplace ρ par ρ^2 et ω par 2ω, on obtient l'équation d'une hyperbole équilatère

$$\rho^2 = \frac{b}{2\sin\omega\cos\omega - a(\cos^2\omega - \sin^2\omega)},$$

ayant pour centre l'origine des coordonnées. Donc, dans ce qui suit, les hyperboles équilatères correspondantes à des droites données par la transformation indiquée, seront toutes concentriques, leur centre commun étant l'origine même des coordonnées.

Cette remarque, qui nous conduira à des conséquences importantes, est due à M. Strebor qui en a fait le sujet de la question 190 (t. VII, p. 240).

2. *Lemme* **II.** **Si une droite**

$$(1) \qquad \rho = \frac{b}{\sin\omega - a\cos\omega}$$

passe par le point $(\rho = \rho', \ \omega = \omega')$, **l'hyperbole équilatère correspondante**

$$(1') \qquad \rho^2 = \frac{b}{\sin 2\omega - a\cos 2\omega}$$

passera par le point $\left(\rho' = \sqrt[2]{\rho'}, \ \omega = \frac{\omega'}{2}\right)$.

3. *Lemme* III. Si m droites se coupent au même point $(\rho = \rho', \ \omega = \omega')$, les m hyperboles équilatères concentriques correspondantes se couperont aussi au même point $\left(\rho = \sqrt[2]{\rho'}, \ \omega = \frac{\omega'}{2}\right)$, lequel point sera le point correspondant du point d'intersection des m droites. Évident d'après le lemme II.

Cas particuliers. Si les m droites sont parallèles, les m hyperboles équilatères correspondantes auront mêmes asymptotes.

4. *Lemme* IV. Si m points sont sur une même droite, savoir :

$$(\rho = \rho_1, \ \omega = \omega_1), \ldots, (\rho = \rho_m, \ \omega = \omega_m),$$

les m points correspondants, savoir :

$$\left(\rho = \sqrt[2]{\rho_1}, \ \omega = \frac{\omega_1}{2}\right), \ldots, \left(\rho = \sqrt[2]{\rho_m}, \ \omega = \frac{\omega_m}{2}\right),$$

sont sur une même hyperbole équilatère ayant pour centre l'origine des coordonnées, et correspondante à la droite des m points.

Démonstration. Prenons l'équation de la droite, elle sera satisfaite par les coordonnées de chacun des m points; prenons l'équation de l'hyperbole équilatère correspondante, elle sera satisfaite (lemme II) par les coordonnées de chacun des m points correspondants. Donc, etc.

Remarque. Dans ce qui précède, nous disons que le point (ρ, ω) est le point *correspondant* du point (ρ', ω') si l'on a

$$\rho = \sqrt[2]{\rho'}, \quad \omega = \frac{\omega'}{2}.$$

5. *Lemme* V. Le point *correspondant* du point d'intersection de deux droites est le point d'intersection des deux hyperboles équilatères concentriques *correspondantes*.

6. *Lemme* VI. Si deux droites se coupent sous un angle A, les hyperboles équilatères concentriques *correspondantes* se couperont sous le même angle A.

Démonstration. Soient

$$\rho = \frac{b}{\sin\omega - a\cos\omega},$$

$$\rho = \frac{b'}{\sin\omega - a'\cos\omega}$$

les équations de deux droites. Soit A l'angle des deux droites; on aura

$$\operatorname{tang} A = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Les hyperboles équilatères *correspondantes* sont, en passant aux coordonnées rectilignes, représentées par

$$ay^2 + 2xy - ax^2 - b = 0, \quad a'y^2 + 2xy - a'x^2 - b' = 0.$$

Soient a_1, a_2 les coefficients angulaires des tangentes aux deux courbes, à leur point commun d'intersection; on aura

$$a_1 = \frac{ax - y}{x + ay}, \quad a_2 = \frac{a'x - y}{x + a'y}.$$

Si A′ désigne l'angle des deux tangentes, on aura

$$\operatorname{tang} A' = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1 a_2} = \frac{\dfrac{a'x - y}{x + a'y} - \dfrac{ax - y}{x + ay}}{1 + \dfrac{(a'x - y)(ax - y)}{(x + a'y)(x + ay)}}$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)(a' - a)}{(x^2 + y^2)(1 + aa')} = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Donc $\operatorname{tang} A' = \operatorname{tang} A$; donc $A' = A$. C.Q.F.D.

Corollaires. 1°. Si deux droites sont perpendiculaires les deux hyperboles équilatères correspondantes se coupent orthogonalement :

2°. Si une droite C divise dans un rapport quelconque l'angle de deux autres droites A et B, l'hyperbole équilatère correspondante C′ divisera dans le même rappor l'angle des deux hyperboles équilatères correspondante A′, B′.

7. Théorème I. *Étant donnée la base d'un triangle curviligne formé par trois arcs d'hyberboles équilatère concentriques, le lieu du sommet, lorsque l'angle fai par les deux côtés est constant, est une ellipse de Cassini.* (Strebor, question 176, t. VII, p. 45.)

Démonstration. Prenons sur le plan de deux axes fixe rectangulaires un triangle rectiligne ABC dont la base AI soit fixe et l'angle au sommet C soit constant. Le lieu décrit par le sommet C sera un cercle dont l'équation ser

$y^2 + x^2 + ay + bx + c = 0$, en coordonnées rectilignes,

et

(1) $\rho^2 + \rho(a \sin\omega + b \cos\omega) + c = 0$, en coordonnées polaires.

La transformation indiquée dans le lemme I nous donne comme correspondant au triangle rectiligne ABC dont i vient d'être parlé, un triangle curviligne A′B′C′ formé d'arcs d'hyperboles équilatères ayant leur centre commun en O, origine des coordonnées; la base curviligne A′B′ de ce triangle étant fixe, et l'angle C′ au sommet constant (lemme VI).

D'ailleurs ($\rho = \rho'$, $\omega = \omega'$) étant les coordonnées du point C dans l'une de ses positions, les coordonnées du point correspondant C′ seront

$$\left(\rho_1 = \sqrt{\rho'},\ \ \omega_1 = \frac{\omega'}{2}\right),$$

d'où l'on tire

$$\rho' = \rho_1^2,\ \ \omega' = 2\omega_1.$$

Or on a

$$\rho'^2 + \rho'(a \sin\omega' + b \cos\omega') + c = 0;$$

donc, en remplaçant ρ', ω' par leurs valeurs ρ_1^2, $2\omega_1$,

(2) $$\rho_1^4 + \rho_1^2(a \sin 2\omega_1 + b \cos 2\omega_1) + c = 0;$$

ou, en passant aux coordonnées rectilignes,

(2′) $$(y^2 + x^2)^2 + 2a.xy + b(x^2 - y^2) + c = 0,$$

équation générale d'une ellipse de Cassini rapportée à deux axes rectangulaires passant par son centre. Or l'équation (2′) représente le lieu décrit par le sommet C′ du triangle curviligne A′B′C′ considéré; donc ce lieu est une ellipse de Cassini. C.Q.F.D.

Remarque. Dans le triangle rectiligne, l'enveloppe de la bissectrice de l'angle mobile C est un point situé sur la circonférence du cercle décrit par le point C; de même, dans le triangle curviligne A′B′C′, si l'on mène à chaque position du sommet C′ l'arc d'hyperbole équilatère ayant son centre en O (origine des coordonnées) qui divise en deux parties égales l'angle au sommet, l'enveloppe de l'arc bissecteur sera un point situé sur l'ellipse de Cassini décrite par le sommet C'. La même chose aurait lieu dans quelque rapport que l'arc d'hyperbole divisât l'angle au sommet, pourvu que ce rapport fût constant.

8. *Corollaires.* L'angle curviligne, inscrit dans un segment déterminé d'une ellipse de Cassini et formé d'arcs d'hyperboles équilatères ayant leur centre commun au centre de l'ellipse, est constant.

Un triangle curviligne étant formé de trois arcs d'hyperboles équilatères ayant leur centre commun en O :

1°. Les trois arcs d'hyperboles équilatères ayant leur centre en O et menés par chaque sommet du triangle perpendiculairement au côté opposé, se coupent en un même point;

2°. Les trois arcs d'hyperboles équilatères ayant leur centre commun en O, et bissecteurs des trois angles du triangle, se coupent en un même point. (Strebor.)

Les théorèmes énoncés ayant lieu pour le triangle rectiligne, ont lieu aussi pour le triangle curviligne en question, d'après les lemmes établis.

9. Théorème II. *Dans tout polygone curviligne de m côtés formé d'arcs d'hyperboles équilatères concentriques, la somme des angles du polygone est égale à autant de fois deux angles droits qu'il y a de côtés moins deux.*

Remarque. Toutefois, il y aura doute sur la manière d'estimer les angles du polygone curviligne.

10. Théoreme III. *Si par un point quelconque d'une ellipse de Cassini, circonscrite à un triangle curviligne formé d'arcs... ayant pour centre celui* O *de l'ellipse, on mène des arcs d'hyp .. perpendiculaires aux côtes du triangle inscrit les trois points d'intersection seront sur*

une même hyperbole équilatère ayant son centre en O.

Remarque. Le théorème que j'ai donné (t. VII, p. 214) sur le quadrilatère rectiligne inscrit à un cercle, donne un théorème correspondant sur le quadrilatère curviligne inscrit à une ellipse de Cassini.

Le théorème sur les quatre points de rencontre des hauteurs dans les quatre triangles que l'on peut former avec les côtés d'un quadrilatère rectiligne, en fournit un analogue sur le quadrilatère curviligne.

Les théorèmes de Pascal et de Brianchon, et leurs conséquences, donnent des propositions analogues pour les hexagones, les pentagones, les triangles curvilignes inscrits ou circonscrits à l'ellipse de Cassini. Il en est de même d'un très-grand nombre d'autres théorèmes. Ainsi :

Le théorème de M. Poncelet sur l'enveloppe des cordes d'un cercle vues d'un point de leur plan sous un angle droit ;

Le théorème de M. Finck, question 154 :

Le principe sur l'involution de Desargues, en n'introduisant dans l'énoncé que des rapports de sinus.

Généralement, tout théorème de collinéation sur des lignes droites, dans l'énoncé duquel n'entre aucune relation entre des grandeurs métriques, mais seulement des constructions de droites d'après des données graphiques, les angles étant constants ou variables suivant une certaine loi, donnera toujours un théorème analogue pour le système curviligne, en remplaçant les droites par des hyperboles équilatères concentriques.

Note. Les analogies qui existent entre le triangle rectiligne inscrit à un cercle, et le triangle curviligne inscrit dans une ellipse de Cassini, permettent de résoudre facilement la question suivante.

PROBLÈME. *Etant donnés le centre et trois points d'une ellipse de Cassini, construire* géométriquement *la tangente à la courbe en l'un quelconque de ses points.*

11. Théorème IV. *Étant données deux hyperboles équilatères concentriques; soient nn_1 le diamètre commun aux deux courbes, et mm_1 la tangente commune :*

1°. Le demi-diamètre commun sera moyen géométrique entre les demi-diamètres aboutissant aux points de contact de la tangente commune (Strebor) ;

2°. Les diamètres aboutissant aux points de contact de la tangente commune seront également inclinés sur le diamètre commun ;

3°. Les deux extrémités du diamètre commun et les deux points de contact de la tangente commune seront les sommets d'un quadrilatère inscriptible.

Ces divers énoncés, y compris celui de M. Strebor, se démontrent facilement par la géométrie.

12. Théorème V. *Étant tracés un demi-cercle et le diamètre qui le termine, on inscrit dans la figure résultante un système de deux cercles tangents entre eux :*

1°. Le point de contact des deux cercles inscrits décrira un arc de cercle (théorème connu) ;

2°. La droite qui joint les centres des deux cercles aura pour enveloppe un arc de cercle.

13. Théorème VI. *Étant données deux ellipses homofocales, si, par les deux extrémités d'un diamètre quelconque de l'ellipse extérieure, on mène des tangentes à l'ellipse intérieure, la somme des longueurs interceptées sur chaque tangente de l'extrémité du diamètre à leur point de commune intersection sera constante. Pour deux hyperboles homofocales la différence serait constante.*

14. Théorème VII. *Soit un triangle variable* ABC *dont les trois côtés pivotent autour de trois points fixes situés en ligne droite; si les deux sommets* A, B *sont constamment sur une même conique, le sommet libre* C *décrira lui-même une conique.*

15. Théorème corrélatif par les polaires réciproques.

Note. Tous ces théorèmes découlent des méthodes métamorphiques. (*Voir* t. V, p. 502.) Tm.