NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

STERN

Trois théorèmes arithmologiques de M. Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 250-252

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__250_1>

TROIS THÉORÈMES ARITHMOLOGIQUES DE M. STEINER,

Démontrés par M. STERN.

(Journal de M. Crelle, t. XIV, p. 76, 1835.)

THÉORÈME I. *Prenant tous les nombres entiers depuis 2 jusqu'à l'infini, et élevant chacun à toutes les puissances négatives, depuis la deuxième jusqu'à l'infini, la somme est égale à l'unité.*

Démonstration. On a

$$\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}+\ldots$$

Faisant successivement $a=2, 3, 4, \ldots, \infty$, le second membre donne toutes les puissances négatives des nombres entiers, et le premier membre devient successivement

$$1-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}-\frac{1}{4},\ldots;$$

dont la somme est égale à l'unité. Ce qu'il fallait démontrer.

Observation. On a aussi

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^5}\ldots$$

Faisant successivement $a=2, 3, 4, \ldots, \infty$ et ajoutant les équations, on conclut que la somme des puissances négatives paires des nombres entiers (l'unité exclue), moins la somme des puissances impaires, est égale à $\frac{1}{2}$; donc les sommes des puissances négatives paires $= \frac{3}{4}$, et les puissances négatives impaires $= \frac{1}{4}$.

Legendre, dans ses *Exercices du calcul intégral,* donne une Table des sommes des puissances négatives, jusqu'à la trente-cinquième, avec seize décimales (part. IV, sect. 1, p. 65). D'après cette Table, la somme des puissances négatives paires, depuis la deuxième jusqu'à la trente-quatrième inclusivement $= 0,7499999998$; ainsi la somme des puissances négatives restantes est moindre que $0,0000000002$; de même la somme des puissances négatives impaires depuis la troisième jusqu'à la trente-cinquième inclusivement $= 0,2499999999908$; ainsi la somme des puissances impaires restantes est moindre que $0,00000000001$.

THÉORÈME II. *La somme de toutes les fractions de la forme* $\frac{1}{(2+x)^{2+y}-1}$ *est* $= 1$, *en donnant à* x *et* y *toutes les valeurs entières positives de* 0 *à* ∞, *et ne prenant qu'une fois les fractions qui se reproduisent plusieurs fois.*

Démonstration.

$$\frac{1}{(2+x)^{2+y}-1} = \frac{1}{(2+x)^{2+y}} + \frac{1}{(2+x)^{4+2y}} + \frac{1}{(2+x)^{6+3y}} + \ldots$$

Donnant à x et à y toutes les valeurs positives entières depuis 0 jusqu'à l'infini; prenant pour $2+x$ d'abord les nombres qui ne sont puissances d'aucun nombre; ensuite les nombres qui ne sont que des carrés et non des puissances supérieures; puis les nombres qui ne sont que des cubes et non des puissances supérieures, etc.; la somme totale renfermera donc la somme de toutes les puissances négatives, et on rentre dans le théorème I.

THÉORÈME III.

$$\sum \frac{(2+x)^{-(2+y)}}{(2+x)^{2+y}-1} = \sum (2+x)^{-(2+y)},$$

en donnant à x et y toutes les valeurs positives de 0 à ∞ avec ces restrictions, $2+y$ ne doit pas être une puissance supérieure d'un nombre, et $2+x$ doit être une puissance supérieure d'un nombre.

Démonstration. Cette expression

$$=\frac{1}{[(2+x)^2]^{2+y}}+\frac{1}{[(2+x)^3]^{2+y}}+\ldots$$

et $2+y$ ne devant pas être une puissance supérieure d'un nombre, il s'ensuit que cette expression est la somme de toutes les puissances négatives, à partir de la seconde, de tous les nombres qui sont une puissance supérieure d'un nombre (*).