NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GUILMIN

Note sur les équations qui ont des racines en progression

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 242-246

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__242_1>

NOTE SUR LES ÉQUATIONS QUI ONT DES RACINES EN PROGRESSION;

PAR M. GUILMIN.

1$^{\text{er}}$ *Cas.* L'équation proposée a toutes ses racines en progression géométrique.

Soit

$$(1)\quad f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \ldots = 0,$$

l'équation proposée, et soient a, aq, aq^2, $aq^3, \ldots aq^{m-1}$ ses m racines.

On voit facilement que

$$f\left(\frac{x}{q}\right) = 0,$$

et, par suite,

$$f\left(\frac{x}{q}\right) - f(x) = 0$$

ont $m-1$ racines aq, aq^2, aq^3, ... aq^{m-1} communes avec la proposée.

$$f\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{x^m}{q^m} + A_1\frac{x^{m-1}}{q^{m-1}} + A_2\frac{x^{m-2}}{q^{m-2}} + \ldots = 0.$$

Nous substituons à cette équation celle-ci

$$(2)\qquad x^m + A_1 q x^{m-1} + A_2 q^2 x^{m-2} + A_3 q^3 x^{m-3} + \ldots = 0.$$

Retranchant (1) de (2), nous avons

$$A_1(q-1)x^{m-1} + A_2(q^2-1)x^{m-2} + A_3(q^3-1)x^{m-3} + \ldots = 0,$$

ou bien, sauf le cas de $q=1$,

$$(3)\qquad A_1 x^{m-1} + A_2(q+1)x^{m-2} + A_3(q^2+q+1)x^{m-3} + \ldots = 0,$$

laquelle a pour racines aq, aq^2, aq^3, ... aq^{m-1}.

La somme de ces racines est égale à celle des racines de (1), moins la racine a. On déduit de là l'égalité

$$-\frac{A_2(q+1)}{A_1} = -A_1 - a,$$

ou

$$(\alpha)\qquad A_2(q+1) = A_1^2 + A_1 a;$$

équation du premier degré en a et q.

La somme des produits des racines de l'équation (3), multipliées deux à deux, est égale à la somme des produits analogues des racines de l'équation (1), moins ceux de ces derniers produits qui renferment le facteur a, c'est-à-dire moins

$$a(aq + aq^2 + aq^3 \ldots + aq^{m-1}) = a(-A_1 - a).$$

Cette remarque conduit à l'égalité

$$\frac{A_3(q^2+q+1)}{A_1} = A_2 - a(-A_1 - a),$$

ou

$$(\beta) \qquad A_3(q^2+q+1)=A_1(A_2+A_1a+a^2),$$

équation du second degré en a et q.

Quand on élimine a entre ces équations, on trouve une équation du second degré en q; le produit des deux racines est 1, ce qu'on pouvait prévoir à priori.

Dans l'application, il vaut mieux substituer les coefficients A_1, A_2, A_3 dans les équations (α) et (β), puis éliminer entre les équations numériques.

Si q est donné, l'équation (α) donne a très-simplement.

2^e *Cas*. L'équation donnée (1) a seulement n racines en progression géométrique.

Alors les équations (1) et (2), ou bien les équations (1) et (3) ont $n-1$ racines communes. On cherchera le plus grand commun diviseur du degré $n-1$ qui existe entre leurs premiers membres; ce diviseur trouvé, on l'égalera à zéro. On aura ainsi une équation du degré $n-1$ qui aura toutes ses racines en progression géométrique, et qu'on pourra résoudre complétement en appliquant ce qui précède.

Les racines $aq, aq^2, \ldots aq^{n-1}$ étant trouvées, on aura a en divisant la plus petite racine trouvée par q, si l'on a pris q plus grand que 1, ou en divisant la plus grande de ces racines par q, si l'on a pris q moindre que 1.

3^e *Cas*. L'équation proposée a toutes ses racines en progression arithmétique.

$$(1) \qquad x^m+A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}+A_3x^{m-3}+\ldots=0.$$

Soient a, $a+r$, $a+2r$, . . $a+(m-1)r$ les racines cherchées.

On voit facilement que l'équation $f(x-r)=0$, et, par suite, l'équation $f(x-r)-f(x)=0$ ont les $m-1$

racines $a+r$, $a+2r, \ldots a+(m-1)r$ communes avec la proposée.

$$f(x-r)-f(x)=-mr.x^{m-1}-\left.\begin{array}{l}(m-1)A_1 r\\ +\dfrac{m(m-1)}{1.2}r^2\end{array}\right|\left.\begin{array}{l}x^{m-2}\ldots\\ +\text{etc.}\end{array}\right\}=0.$$

Laissant de côté le cas où $r=0$, divisant par r et changeant les signes, nous trouverons ainsi :

$$(2)\left\{\begin{array}{l|l|l} mx^{m-1}+(m-1)A_1 & x^{m-2}+(m-2)A_2 & x^{m-3} \\ -\dfrac{m(m-1)}{1.2}r & -\dfrac{(m-1)(m-2)}{1.2}A_1 r & +\text{etc} \\ & +\dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}r^2 & \end{array}\right\}=0.$$

Les racines de cette équation étant $a+r$, $a+2r, \ldots$ $a+(m-1)r$, nous concluons comme précédemment que leur somme est égale à $-A_1-a$, d'où

$$-\frac{m-1}{m}A_1+\frac{m-1}{1.2}r=-A_1-a,$$

ou

$$(\alpha)\qquad 2am+m(m-1)r=-2A_1.$$

équation du premier degré en a et r.

La considération des produits des racines, multipliées deux à deux, donne encore

$$\frac{m-2}{m}A_2-\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.m}A_1 r+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3}r^2=A_2-a(-A_1-a)$$

ou

$$(\beta)\left\{\begin{array}{l}\dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}r^2-\dfrac{(m-1)(m-2)}{1.2}A_1 r\\ \qquad\qquad =2A_2+A_1 a+ma.\end{array}\right.$$

Les équations (α) et (β) donneront a et r; en éliminant a, on trouve pour r deux valeurs égales et de signes contraires.

Nous conseillons de conserver le système des équations (α) et (β) pour les applications numériques.

L'équation (α) est celle que donne immédiatement l'arithmétique.

4^e *Cas*. L'équation (1) a seulement n racines en progression arithmétique.

On trouvera ces n racines en suivant une méthode analogue à celle qui est indiquée ci-dessus pour le deuxième cas.