LEBESGUE

Théorème sur les surfaces courbes algébriques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 22-27

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__22_1>

THÉORÈME SUR LES SURFACES COURBES ALGÉBRIQUES;

PAR M. LEBESGUE.

Si, autour d'un point fixe, on fait tourner une transversale, qui rencontre une surface géométrique en autant

---

(*) 1°. Le théorème cité de M. Binet est évident; prenant le plan principal commun pour plan des xy, les équations des surfaces sont

$$z^2 + P = 0, \qquad z^2 + Q = 0;$$

P et Q sont des fonctions en x, y du second degre: donc $P - Q = 0$ est l'équation de la projection de l'intersection sur le plan principal commun.

2°. La courbe représentee par l'équation $4\rho = 3 + \cos\omega$ est une *podaire*, c'est-à-dire la projection d'un point sur les tangentes à une conique (t. IV, p. 426). TM.

de points A, B, etc., qu'elle a de dimensions, et qu'on prenne sur cette transversale, dans chacune de ses positions, un point M tel que la valeur inverse de sa distance au point fixe soit moyenne arithmétique entre les valeurs inverses des distances des points A, B, etc., à ce point fixe, le point M aura pour lieu géométrique un plan.

On voit, dans l'*Aperçu historique* de M. Chasles, que Cotes a énoncé le théorème pour les courbes algébriques, ou, comme on dit, géométriques.

La démonstration se donne en peu de mots, même pour le cas des surfaces.

Soit

$$(1)\quad A + (Bx + Cy + Dz) + .. + (... + Px^n + Qy^n + Rz^n) = 0$$

l'équation d'une surface géométrique du $n^{ième}$ degré ou de n dimensions. Prenons d'abord pour point fixe l'origine, et menons la transversale $x = pz$, $y = qz$; l'équation (1) donnera de suite, en substituant et divisant par z^n,

$$(2)\quad \left(\frac{1}{z}\right)^n + \left(\frac{Bp + Cq + D}{A}\right)\left(\frac{1}{z}\right)^{n-1} + \ldots + (\ldots Pp^n + Qq^n + R) = 0,$$

et si l'on représente par $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les n valeurs de z, on aura

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n} = -\left(\frac{Bp + Cq + D}{A}\right).$$

Si l'on représente par X, Y, Z les coordonnées du point M, et par $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les distances à l'origine des points d'intersection de la surface et de la transversale, et enfin par R la distance de M à l'origine, l'équation indiquée par l'énoncé

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_n} = \frac{n}{R}$$

donne de suite

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \ldots + \frac{1}{z_n} = \frac{n}{Z},$$

puisque l'on a

$$r_1 = z_1\sqrt{1 + p^2 + q^2 + \ldots} = Z_1 k,$$

et ainsi des autres. La suppression d'un facteur commun donne donc

$$\sum_1^n \frac{1}{z} = -\frac{Bp + Cq + D}{A} = \frac{n}{Z},$$

ou bien

$$BpZ + CqZ + DZ + nA = 0,$$

et comme l'on a

$$X = pZ, \quad Y = qZ,$$

on aura enfin

(3) $$BX + CY + DZ + nA = 0,$$

équation d'un plan.

Si le point fixe n'est pas à l'origine, et que ses coordonnées soient a, b, c, on prendra ce point pour origine de nouveaux axes parallèles aux premiers, en posant

$$x = a + x', \quad y = b + y', \quad z = c + z';$$

et si l'équation (1) est $f(x, y, z) = 0$, elle deviendra

$$f(x' + a, \ y' + b, \ z' + c) = 0,$$

ou bien, en développant,

$$f(a, b, c) + \left(\frac{df}{da}x' + \frac{df}{db}y' + \frac{df}{dc}z'\right) + \ldots = 0$$

Le lieu cherché sera donc

$$X'\frac{df}{da} + Y'\frac{df}{db} + Z'\frac{df}{dc} + nf(a, b, c) = 0,$$

ou, en repassant aux premiers axes,

(4) $$(X - a)\frac{df}{da} + (Y - b)\frac{df}{db} + (Z - c)\frac{df}{dc} + nf(a, b, c) = 0.$$

Il est à remarquer que cette équation serait celle du plan tangent si l'on avait $f(a, b, c) = 0$, ou si le point fixe était sur la surface.

Si, dans l'équation (1), on remplace x, y, z par $\frac{x}{u}$, $\frac{y}{u}$, $\frac{z}{u}$, elle devient homogène et peut se mettre sous la forme

$$x\frac{df}{dx} + y\frac{df}{dy} + z\frac{df}{dz} + u.\frac{df}{du} = 0 = nf(x, y, z, u);$$

alors l'équation (4) devient

$$\text{(5)} \qquad \mathrm{X}\frac{df}{da} + \mathrm{Y}\frac{df}{db} + \mathrm{Z}\frac{df}{dc} + u\frac{df}{du} = 0.$$

(*Voyez* à ce sujet les *Nouvelles Annales*, t. VII, p. 5.)

Pour $n = 2$, ou le cas des surfaces du second degré, l'équation (4) n'est autre que le plan polaire du pôle (a, b, c). Il paraît assez naturel de prendre ce théorème pour point de départ de la théorie des pôles et polaires, ainsi que l'a fait M. Terquem dans ses relations d'identité.

Comme $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{2}{\mathrm{R}}$ revient à $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{\mathrm{R}} = \frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{1}{r_2}$, ou bien encore à

$$\frac{\mathrm{R} - r_1}{r_1} = \frac{r_2 - \mathrm{R}}{r_2},$$

on reconnaît que les cordes issues du point fixe sont divisées harmoniquement par le point fixe et par le point M.

Voici une autre propriété du plan polaire pour les surfaces du second degré.

Par un point fixe, prenons trois transversales coupant la surface, la première aux points α, α', la deuxième aux points β, β', la troisième aux points γ, γ'. Les trois transversales n'étant point dans un même plan, si l'on cherche les intersections des plans $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$; $\alpha\beta'\gamma'$, $\alpha'\beta\gamma$; $\beta\alpha'\gamma'$, $\beta'\alpha\gamma$; $\gamma\alpha'\beta'$, $\gamma'\alpha\beta$; $\alpha\beta\gamma'$, $\alpha'\beta'\gamma$; $\alpha\gamma\beta'$, $\alpha'\gamma'\beta$,

$\beta\gamma\alpha'$, $\beta'\gamma'\alpha$, on verra qu'ils se croisent quatre à quatre sur le plan polaire.

Prenons, en effet, les trois transversales pour les axes, et soient $x_1, 0, 0$; $x_2, 0, 0$ les coordonnées des points α, α'; de même, $0, y_1, 0$; $0, y_2, 0$ les coordonnées des points β, β'; et enfin $0, 0, z_1$; $0, 0, z_2$ les coordonnées des points γ, γ'. Les plans $\alpha\beta'\gamma'$, $\alpha'\beta\gamma$ auront pour équations

$$\frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_2} + \frac{z}{z_2} = 1, \qquad \frac{x}{x_2} + \frac{y}{y_1} + \frac{z}{z_1} = 1.$$

Ajoutant membre à membre

$$x\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) + y\left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right) + z\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right) = 2,$$

ce plan contiendra l'intersection des deux premiers; or, d'après l'équation

$$A + Bx + Cy + Dz + \ldots = 0,$$

on a

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{B}{A}, \quad \frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = -\frac{C}{A}, \quad \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = -\frac{D}{A}:$$

de là

$$Bx + Cy + Dz + 2A = 0,$$

équation du plan polaire. Les autres systèmes $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$, etc., donnent le même résultat.

Pour trois transversales qui ne passeraient pas par l'origine, on poserait

$$x = a + mx' + ny' + pz', \quad y = b + m'x' + n'y' + p'z',$$
$$z = c + m''x' + n''y' + p''z',$$

pour rentrer dans le premier cas.

Alors l'équation de la surface deviendrait

$$A_1 + B_1x' + C_1y' + D_1z' + \ldots = 0,$$

et le lieu des points de croisement

$$B_1 x' + C_1 y' + D_1 z' + 2A_1 = 0, \tag{6}$$

et comme le développement de

$$f(x, y, z) = f(a + mx' + ny' + pz, \quad b + m'x' + n'y' + p'z,$$
$$c + m''x' + n''y' + p''z) = 0$$

donne

$$A_1 = f(a, b, c),$$
$$B_1 = m\frac{df}{da} + m'\frac{df}{db} + m''\frac{df}{dc},$$
$$C_1 = n\frac{df}{da} + n'\frac{df}{db} + n''\frac{df}{dc},$$
$$D_1 = p\frac{df}{da} + p'\frac{df}{db} + p''\frac{df}{dc}.$$

l'équation (6) deviendra

$$\frac{df}{da}(mx' + ny' + pz') + \frac{df}{db}(m'x' + n'y' + p'z')$$
$$+ \frac{df}{dc}(m''x' + n''y' + p''z') + 2f(a, b, c) = 0,$$

ou encore

$$(x - a)\frac{df}{da} + (y - b)\frac{df}{db} + (z - c)\frac{df}{dc} + 2f(a, b, c) = 0,$$

équation du plan polaire.

Ces propositions sur le plan polaire sont le fondement des autres, que notre but n'est pas d'exposer; nous nous contenterons d'ajouter que la méthode des homogènes, citée plus haut, simplifie la théorie analytique des polaires réciproques. C'est ce que nous verrons sans doute dans la suite de l'article de M. Terquem (t. VII, p. 5 et 410).