LEBESGUE

Sur l'équation du troisième degré

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 219-220

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__219_1>

SUR L'ÉQUATION DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. LEBESGUE.

Si l'on prend l'équation

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0,$$

les trois déterminants

$$ac - b^2,\quad ad - bc,\quad bd - c^2,\quad \text{ou}\ \mathrm{A},\ 2\mathrm{B},\ \mathrm{C},$$

se présenteront dans la résolution de l'équation. J'énoncerai ici les propositions suivantes:

1°. Si $A = B = C = 0$, la racine est triple et égale à $-\frac{b}{a}$;

2°. Si $AC - B^2 = 0$, il y a une racine double

$$x' = x'' = -\frac{B}{A},$$

la racine simple est

$$x''' = -\frac{Ad}{Ca};$$

3°. Si $A = 0$ ou si $C = 0$, l'équation se réduit à une équation à deux termes ;

4°. Si l'on pose

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0,$$

et que λ', λ'' soient les deux valeurs de λ, on aura, en appelant α une racine cubique imaginaire de l'unité,

$$ax' + b = \sqrt[3]{A(a\lambda' + b)} + \sqrt[3]{A(a\lambda'' + b)},$$

$$ax'' + b = \alpha\sqrt[3]{A(a\lambda' + b)} + \alpha^2\sqrt[3]{A(a\lambda'' + b)},$$

$$ax''' + b = \alpha^2\sqrt[3]{A(a\lambda' + b)} + \alpha\sqrt[3]{A(a\lambda'' + b)}.$$

Pour parvenir à ce résultat, on change x en $y + \lambda$, ce qui donne une équation de la forme

$$a'y^3 + 3b'y^2 + 3c'y + d' = 0.$$

La condition $a'c' = b'^2$, revient à $ac = b^2$. Ainsi elle ne peut être généralement satisfaite. La condition $b'd' - c'^2 = 0$ revient à l'équation $A\lambda^2 + 2B\lambda + C = 0$. Ayant déterminé λ, on aura y par le moyen d'une équation à deux termes, où l'inconnue est $d' \cdot \frac{1}{y} + c'$.

Les réductions sont assez longues et la solution précédente n'a d'autre avantage que la symétrie. On voit qu'il est toujours inutile de faire disparaître le second terme, et de réduire le premier coefficient à l'unité; ce qui, selon M. Eisenstein, est même nuisible (*voir* p. 110).