TERQUEM

Questions d'examen sur le pôle et la polaire dans le cercle

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 216-218

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__216_0>

QUESTIONS D'EXAMEN SUR LE POLE ET LA POLAIRE DANS LE CERCLE

(Voir t. V, p. 704 : question 14).

1. Problème. *Étant donnés un cercle et un point pris dans l'intérieur du cercle; trouver sur la polaire un point tel, qu'en menant par ce point et le pôle une sécante, le segment moyen divisé par le segment extérieur soit égal à une quantité donnée.*

Solution. Notation. O le centre du cercle, P le point donné, D le point de rencontre de OP avec la polaire de P, M le point cherché sur la polaire, MNPQ la sécante menée par M et P, N première intersection et Q seconde intersection de la sécante avec le cercle, p le rapport donné des segments, $\text{OD} = a$, $r =$ rayon, $\text{DM} = x_1$.

On a $\frac{\text{PN}}{\text{NM}} = p = \frac{\text{PQ}}{\text{MQ}}$, car P est le pôle de DM; donc

$$\frac{\overline{\text{PN}}^2}{\overline{\text{NM}}^2} = \frac{\text{PN}.\text{PQ}}{\text{NM}.\text{MQ}} = p^2.$$

Or

$$\text{PN}\,.\,\text{PQ} = \frac{r^2(a^2 - r^2)}{a^2}, \text{ puissance du point P (*)},$$

$$\text{NM}.\text{MQ} = x_1^2 + a^2 - r^2, \text{ puissance du point M};$$

donc

$$r^2(a^2 - r^2) = a^2 p^2 (x_1^2 + a^2 - r^2).$$

De là on déduit la valeur de x_1.

2. Problème. Mêmes données : *Trouver sur la polaire deux points tels, qu'en menant par chacun et le pôle*

(*) Si, par un point pris dans le plan, on mène une corde, le produit constant des segments, additifs ou soustractifs, se nomme la *puissance* de ce point; dénomination commode introduite par le célèbre M. Steiner.

une sécante, et divisant le segment moyen par le segment extérieur, la somme des carrés des quotients soit égale à une quantité donnée.

Solution. M′ étant le second point, désignons la distance DM′ par x_2 et la quantité donnée par A : le carré du premier quotient sera $\dfrac{r^2(a^2-r^2)}{a^2(x_1^2+a^2-r^2)}$, et celui du second $\dfrac{r^2(a^2-r^2)}{a^2(x_2^2+a^2-r^2)}$; donc

$$\frac{r^2(a^2-r^2)}{a^2}\left(\frac{1}{x_1^2+a^2-r^2}+\frac{1}{x_2^2+a^2-r^2}\right)=\mathrm{A},$$

d'où

$$\begin{aligned}a^2\mathrm{A}x_1^2x_2^2&+(a^2-r^2)(a^2\mathrm{A}-r^2)(x_1^2+x_2^2)\\&+(a^2-r^2)^2(a^2\mathrm{A}-2r^2)=0.\end{aligned}$$

Telle est la relation qui doit exister entre x_1 et x_2, pour que les points M et M′ répondent à la question; en considérant x_1 et x_2 comme les coordonnées d'une courbe, on voit que cette ligne est du quatrième degré et facile à discuter en coordonnées polaires.

Corollaire. Si $\mathrm{A}=\dfrac{r^2}{a^2}$, il vient $x_1x_2=a^2-r^2$, ce qui fournit cette construction : Menez du point D la tangente DR au cercle, prolongez RD d'une quantité DR′ égale à elle-même, faites passer un cercle par R et R′, la polaire rencontre le cercle en deux points M et M′ qui remplissent les conditions voulues.

Faisant $\mathrm{MPD}=\alpha_1$, $\mathrm{M_1PD}=\alpha_2$, on a

$$x_1=\frac{a^2-r^2}{a}\operatorname{tang}\alpha_1,\quad x_2=\frac{a^2-r^2}{a}\operatorname{tang}\alpha_2;$$

donc

$$\operatorname{tang}\alpha_1\operatorname{tang}\alpha_2=\frac{a^2}{a^2-r^2}=\sin^2\mathrm{ROD}:$$

c'est la solution de la question d'examen (*voir* l'endroit ci-dessus cité).

3. Si, au lieu de prendre $\frac{\mathrm{PN}^2}{\mathrm{NM}^2}$, on prend $\frac{\mathrm{NM}^2}{\mathrm{PN}^2}$, on obtient la relation

$$a^2[x_1^2 + x_2^2 + 2(a^2 - r^2)] = \mathrm{A}r^2(a^2 - r^2).$$