

TERQUEM

Théorème sur les coniques homofocales

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 8
(1849), p. 214

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__214_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

THÉORÈME SUR LES CONIQUES HOMOFOCALES

(Voir p. 234)

1. *Lemme.* Le carré de la distance du centre d'une ellipse à une tangente, diminué du carré de la distance du même centre à une parallèle à cette tangente, menée par un foyer, est égal au carré du demi-petit axe.

2. *Théorème.* Le lieu géométrique du sommet d'un angle droit circonscrit à deux ellipses homofocales est un cercle concentrique aux ellipses.

Démonstration. Soient O le centre et F un foyer commun, P la projection de O sur une tangente à la première ellipse, et P' la projection de O sur une droite tangente à la seconde ellipse et perpendiculaire à la première tangente; et soient Q et Q' les projections du foyer F sur OP et OP'. D'après le lemme, on a, en appelant b et b' les demi-petits axes,

$$\overline{OP}^2 - \overline{OQ}^2 = b^2, \quad \overline{OP'}^2 - \overline{OQ'}^2 = b'^2.$$

Ces deux relations donnent

$$\overline{OP}^2 + \overline{OP'}^2 - (\overline{OQ}^2 + \overline{OQ'}^2) = b^2 + b'^2.$$

Mais $\overline{OQ}^2 + \overline{OQ'}^2 = \overline{OF}^2 = c^2$; donc

$$\overline{OP}^2 + \overline{OP'}^2 = b^2 + b'^2 + c^2;$$

donc l'intersection des deux tangentes est sur une circonférence ayant pour centre celui des ellipses, et pour rayon la racine carrée de $b^2 + b'^2 + c^2$. C.Q.F.D.

Observation. Le théorème est de M. Chasles, et il en a donné cette belle démonstration dans le cours de géométrie supérieure qu'il fait à la Sorbonne; cours qui serait fréquenté avec empressement à Londres, à Dublin, à Berlin, à Königsberg, à Göttingue, et, en général, dans les grandes cités où les sciences mathématiques sont cultivées pour elles-mêmes.