NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JULES HAREL

Solution de la question 201

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 206-208

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__206_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1849, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SOLUTION DE LA QUESTION 201

(Voir p. 44),

PAR M. HAREL (JULES),
Élève du lycée de Rouen.

Soient P, P' *deux points appartenant respectivement à deux ellipses homofocales, tels que les tangentes qu'on mène à ces courbes en* P *et en* P' *se coupent à angle droit; en désignant par* I *le point de leur intersection, et par* C *le centre commun des ellipses, la droite* CI *divisera en parties égales la distance* PP' (Strebor).

Soient $2a$ et $2b$ les deux axes de l'ellipse intérieure, et $2A$ et $2B$ les axes de l'ellipse extérieure; les équations de ces deux ellipses, rapportées à leur centre commun et à leurs axes, seront

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$
$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2.$$

Soient x' et y' les coordonnées de P, x'' et y'' celles de P'; l'équation de la tangente en P est

$$y = -\frac{b^2x'}{a^2y'}x + \frac{b^2}{y'};$$

l'équation de la tangente en P′ est

$$y = -\frac{B^2 x''}{A^2 y''} x + \frac{B^2}{y''};$$

les coordonnées du point d'intersection I sont

$$x = \frac{a^2 A^2 (B^2 y' - b^2 y'')}{a^2 B^2 y' x'' - A^2 b^2 x' y''},$$

$$y = \frac{b^2 B^2 (a^2 x'' - x' A^2)}{a^2 B^2 y' x'' - A^2 b^2 x' y''};$$

donc l'équation de la droite CI est

$$y = \frac{b^2 B^2 (a^2 x'' - x' A^2)}{a^2 A^2 (B^2 y' - b^2 y'')} x.$$

Il faut faire voir que cette équation est satisfaite pour les coordonnées du point milieu de PP′, coordonnées qui sont $\frac{y' + y''}{2}$ et $\frac{x' + x''}{2}$; c'est-à-dire il faut montrer que l'on a

$$\frac{y' + y''}{2} = \frac{b^2 B^2 (a^2 x'' - x' A^2)}{a^2 A^2 (B^2 y' - b^2 y'')} \left(\frac{x' + x''}{2}\right)$$

ou

$$\begin{aligned} &A^2 B^2 (a^2 y'^2 + b^2 x'^2) + A^2 a^2 (B^2 - b^2) y' y'' \\ &= a^2 b^2 (B^2 x''^2 + A^2 y''^2) + B^2 b^2 (a^2 - A^2) x' x''. \end{aligned}$$

Or (x', y') étant sur la première ellipse, on a

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2;$$

(x'', y'') étant sur la seconde ellipse, on a

$$A^2 y''^2 + B^2 x''^2 = A^2 B^2.$$

Il suffit donc de démontrer que

$$-a^2 A^2 y' y'' (b^2 - B^2) = b^2 B^2 x' x'' (a^2 - A^2).$$

Or, les tangentes étant perpendiculaires, on a

$$a^2 A^2 y'' y' = -b^2 B^2 x' x'';$$

les deux ellipses étant homofocales, on a aussi

$$b^2 - B^2 = a^2 - A^2.$$

La relation ci-dessus est justifiée; donc le théorème est démontré.

Nota. Le lieu géométrique du point I est un cercle concentrique aux ellipses, ce cercle est touché au point I par le cercle décrit sur PP′ comme diamètre (*voir* tome V, page 127); donc le rayon CI passe par le milieu de PP′.