NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. CATALAN

Théorie des fractions continues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 154-202

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__154_1>

THÉORIE DES FRACTIONS CONTINUES;

PAR M. E. CATALAN.

Les Traités élémentaires ne contiennent, ordinairement, que les premières notions sur les fractions continues. Quant aux propriétés les plus importantes, les plus remarquables de ces quantités, elles se trouvent disséminées dans un grand nombre d'ouvrages. J'ai cru faire une chose utile aux élèves, en essayant de leur donner un résumé succinct de la théorie dont il s'agit.

I. — *Préliminaires.*

1. On appelle, en général, *fraction continue,* toute expression de la forme

$$a + \cfrac{\beta}{b + \cfrac{\gamma}{c + \cfrac{\delta}{d + \ldots}}};$$

mais, dans les Éléments, on réserve plus particulièrement ce nom aux quantités telles que

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\ldots}}};$$

et l'on suppose même, pour plus de simplicité, que les nombres a, b, c, d, etc., sont *entiers* et *positifs*.

2. Il est facile de développer, en fraction continue ayant cette dernière forme, une quantité commensurable quelconque. Soit, par exemple, $x=\frac{287}{167}$. En extrayant les entiers, on trouve

$$x=1+\frac{120}{167}=1+\frac{1}{\left(\frac{167}{120}\right)}:$$

mais

$$\frac{167}{120}=1+\frac{47}{120}=1+\frac{1}{\left(\frac{120}{47}\right)}.$$

A son tour, la fraction $\frac{120}{47}$ se transforme en

$$2+\frac{26}{47}=2+\frac{1}{\left(\frac{47}{26}\right)}:$$

et ainsi de suite. On a donc, au lieu de la fraction *ordinaire* proposée, la fraction *continue* équivalente

$$x=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\frac{1}{5}}}}}}.$$

On voit que les *termes* 1, 1, 2, 1, 1, 4, 5 de la fraction continue sont les quotients entiers fournis par l'opération du plus grand commun diviseur, effectuée sur 287 et 167 : pour cette raison, on les désigne aussi sous le nom de *quotients incomplets*. Il est clair que, pour abréger, on peut écrire

$$x = 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 4,\ 5.$$

3. Pour réduire une fraction continue en fraction ordinaire, il suffit de faire un calcul inverse du précédent. Ainsi, l'on aura successivement

$$4 + \frac{1}{5} = \frac{21}{5},\quad 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{21}{5}\right)} = 1 + \frac{5}{21} = \frac{26}{21},$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5}}} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{26}{21}\right)} = 1 + \frac{21}{26} = \frac{47}{26}, \ldots$$

Pour plus de régularité, on dispose l'opération de la manière suivante :

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 4 & 5 \\ 287 & 167 & 120 & 47 & 26 & 21 & 5 & 1. \end{array}$$

Les termes de la première ligne sont ceux de la fraction continue. Le premier terme de la seconde ligne est 1. Enfin, *un terme quelconque de* cette seconde ligne *est égal au produit du terme précédent par le terme écrit au-dessus de celui-ci, augmenté du terme qui précède de deux rangs le terme cherché.*

4. Avant d'indiquer un autre procédé pour réduire une fraction continue en fraction ordinaire, observons que, si dans la fraction continue $x = a, b, c, d, \ldots$, nous conservons seulement le premier terme a, puis les deux premiers termes, puis les trois premiers, etc. (ces termes

étant supposés positifs), nous obtiendrons des fractions

$$\frac{A}{A'} = \frac{a}{1}, \quad \frac{B}{B'} = a + \frac{1}{b} = \frac{ab+1}{b},$$

$$\frac{C}{C'} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = a + \frac{c}{bc+1} = \frac{abc+a+c}{bc+1}, \ldots,$$

lesquelles seront alternativement plus petites et plus grandes que x. En effet, 1° a est $< x$; 2° le diviseur b est trop petit: donc $\frac{1}{b}$ est trop grand, donc $\frac{B}{B'}$ est $> x$, etc. Les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, etc., sont, pour des motifs que nous développerons plus tard, nommées *convergentes* ou *réduites*. D'après ce que nous venons de dire, *une réduite est plus petite que la fraction continue, ou plus grande, selon que cette réduite est de rang impair ou de rang pair* (*).

II. — *Formation des réduites.*

5. Pour découvrir la loi des réduites, observons que si, dans la seconde réduite $\frac{B}{B'} = \frac{ab+1}{b}$, nous remplaçons b par $b + \frac{1}{c}$, nous obtiendrons la troisième. Ainsi,

$$\frac{C}{C'} = \frac{a\left(b + \frac{1}{c}\right) + 1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{(ab+1)c + a}{bc+1} = \frac{Bc + a}{B'c + 1} = \frac{Bc + A}{B'c + A'};$$

(*) Si la fraction continue était de la forme $\cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \ldots}}$, c'est-à dire si elle était *plus petite que l'unité*, on prendrait pour *premier terme zero*, et pour *première réduite*, $\frac{0}{1}$.

car

$$\frac{A}{A'} = a = \frac{a}{1}.$$

Pour former le numérateur de la troisième réduite, on multiplie le numérateur de la seconde par le quotient incomplet correspondant à la troisième, et on ajoute au produit le numérateur de la première réduite. Le dénominateur de la troisième réduite se forme, de la même manière, au moyen des dénominateurs précédents. Cette loi est générale; car elle résulte d'un raisonnement que l'on pourrait répéter à l'égard de deux quotients incomplets consécutifs quelconques. Si donc $\frac{N}{N'}$, $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ sont trois réduites consécutives, et si q représente le quotient incomplet correspondant à $\frac{Q}{Q'}$, nous aurons

$$(1) \qquad \frac{Q}{Q'} = \frac{Pq + N}{P'q + N'};$$

ou plutôt

$$(2) \qquad Q = Pq + N,$$

$$(3) \qquad Q' = P'q + N' \text{ (*)}.$$

6. Si l'on applique la règle (1) à la fraction continue $x = 1, 1, 2, 1, 1, 4, 5$, on trouve, pour les réduites consécutives,

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{12}{7}, \frac{55}{32}, \frac{287}{167}.$$

Ainsi qu'on devait s'y attendre, la dernière réduite est la valeur même de la fraction continue.

(*) Un mode de demonstration bien connu permettrait de vérifier *à posteriori* la géneralité de la formule (1); mais cette vérification est superflue.

III. — *Propriétés des réduites.*

7. Éliminons q entre les formules (2) et (3); nous obtiendrons

$$QP' - Q'P = -(PN' - P'N),$$

c'est-à-dire que *la différence des produits en croix des termes de deux réduites consécutives est constante en valeur absolue.* Et comme, pour les deux premières réduites $\frac{A}{A'} = \frac{a}{1}$, $\frac{B}{B'} = \frac{ab+1}{b}$, cette différence est $+1$, on conclut que

$$(4) \qquad PN' - P'N = \pm 1,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$(5) \qquad \frac{P}{P'} - \frac{N}{N'} = \pm \frac{1}{N'P'},$$

en prenant le signe $+$ si $\frac{P}{P'}$ est une réduite de rang *pair*.

Ainsi, *la différence de deux réduites consécutives est égale à* ± 1, *divisé par le produit des dénominateurs de ces réduites.*

8. Ces dernières propriétés subsistent, quelles que soient les valeurs des termes a, b, c, etc., de la fraction continue; c'est-à-dire que ces termes peuvent indifféremment être *entiers, fractionnaires, positifs, négatifs, incommensurables,* et même *algébriques.* Les propriétés suivantes supposent que la fraction continue a ses termes *entiers.*

9. D'après l'équation (4), si P et P′ avaient un facteur commun, ce facteur devrait diviser l'unité: donc P et P′ sont premiers entre eux; et, conséquemment, *toutes les réduites sont,* ainsi que leur nom l'indique, *des fractions irréductibles.*

Cette même équation (4) prouve que N et P sont premiers entre eux, et qu'il en est de même pour N′ et P′. Ainsi, *les numérateurs de deux réduites consécutives sont premiers entre eux, et les dénominateurs de ces réduites sont aussi premiers entre eux.*

10. *Les réduites approchent de plus en plus de la fraction continue, alternativement par défaut et par excès.*

Pour démontrer cet important théorème, remarquons d'abord que si, dans le second membre de la formule (1), nous remplaçons le *quotient incomplet* q par le *quotient complet* $q+\cfrac{1}{r+\cfrac{1}{s+\ldots}}=y$, nous obtiendrons la valeur même de la fraction continue, attendu que nous n'aurons rien négligé. Cette formule donnera donc

$$x=\frac{Py+N}{P'y+N'}. \tag{6}$$

Cela étant, supposons, pour fixer les idées, que $\frac{N}{N'}$ soit une réduite de rang impair, auquel cas $\frac{N}{N'}<x<\frac{P}{P'}$, et comparons les différences $x-\frac{N}{N'}$ et $\frac{P}{P'}-x$.

Or,

$$x-\frac{N}{N'}=\frac{Py+N}{Py'+N'}-\frac{N}{N'}=\frac{(PN'-P'N)y}{(P'y+N')N'},$$

ou, d'après l'équation (4),

$$x-\frac{N}{N'}=\frac{y}{(P'y+N')N'}.$$

En second lieu,

$$\frac{P}{P'}-x=\frac{P}{P'}-\frac{Py+N}{P'y+N'}=\frac{PN'-P'N}{(P'y+N')P'},$$

ou

$$\frac{P}{P'} - x = \frac{1}{(P'y + N')P'}.$$

La proposition sera donc démontrée si nous vérifions l'inégalité

$$\frac{1}{(P'y + N')P'} < \frac{y}{(P'y + N')N'},$$

laquelle se réduit à $\frac{N'}{P'} < y$.

Cette dernière inégalité est évidente : car

$$y = q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \ldots}},$$

quantité > 1 ; et, d'après la loi de formation des réduites, on a $P' > N'$.

11. L'erreur ε que l'on commet en prenant une réduite $\frac{P}{P'}$ au lieu de la fraction continue est, d'après l'expression de $\frac{P}{P'} - x$, donnée par la formule

$$\varepsilon = \frac{1}{(P'y + N')P'}.$$

Pour avoir une limite *supérieure* de cette erreur, rappelons-nous que y est > 1. Si donc nous remplaçons y par 1, nous aurons

$$\varepsilon < \frac{1}{P'(P' + N')}.$$

Ainsi, *l'erreur que l'on commet en prenant une réduite pour valeur approchée de la fraction continue, est moindre que l'unité divisée par le produit du dénominateur de la réduite par la somme de ce dénominateur et de celui qui le précède.*

12. Si, dans l'inégalité précédente, nous négligeons N' devant P′, nous aurons, à plus forte raison,

$$\varepsilon < \frac{1}{P'^2}.$$

Ainsi, *l'erreur* ε *est moindre que l'unité divisée par le carré du dénominateur de la réduite à laquelle on s'arrête.*

Cette limite, quoique peu approchée, est très-souvent employée à cause de sa simplicité.

13. Au lieu de remplacer y par 1, remplaçons y par q : nous trouvons

$$\varepsilon < \frac{1}{P'(P'q + N')},$$

ou simplement

$$\varepsilon < \frac{1}{P'Q'}.$$

Cette limite est plus approchée que les deux autres; mais on l'emploie rarement, parce qu'elle suppose connu le dénominateur Q′ de la réduite qui suit $\frac{P}{P'}$.

14. Pour obtenir une limite *inférieure* de ε, substituons $q + 1$ à y dans l'expression de cette quantité; nous aurons

$$\varepsilon > \frac{1}{P'(P'q + P' + N')},$$

ou

$$\varepsilon > \frac{1}{P'(P' + Q')}.$$

15. Les considérations qui précèdent justifient la dénomination de *convergentes* attribuée aux réduites. Elles démontrent aussi que l'approximation d'une réduite est bien supérieure à celle qui paraîtrait devoir résulter de la valeur du dénominateur de cette réduite. Cette dernière propriété, qui rend l'emploi des fractions continues préférable à celui des autres procédés d'approximation, n'est

cependant pas la plus remarquable : les réduites jouissent encore de la propriété *caractéristique* suivante.

16. *Chaque réduite approche de la valeur de la fraction continue plus que toute autre fraction plus simple.*

Soient deux réduites consécutives $\frac{N}{N'}$, $\frac{P}{P'}$, entre lesquelles tombe la valeur de x; et supposons qu'une fraction $\frac{k}{k'}$ soit plus approchée de x que ne l'est $\frac{P}{P'}$. Cette fraction $\frac{k}{k'}$ sera comprise entre $\frac{N}{N'}$ et $\frac{P}{P'}$; et nous aurons, en supposant $\frac{N}{N'}$ de rang impair,

$$\frac{N}{N'} < \frac{k}{k'} < \frac{P}{P'}.$$

Cette double inégalité donne

$$\frac{k}{k'} - \frac{N}{N'} < \frac{P}{P'} - \frac{N}{N'},$$

ou

$$\frac{kN' - k'N}{k'N'} < \frac{PN' - P'N}{N'P'},$$

ou simplement

$$\frac{kN' - k'N}{k'} < \frac{1}{P'}.$$

Le numérateur $kN' - k'N$ n'est pas nul, sans quoi nous aurions $\frac{k}{k'} = \frac{N}{N'}$, et la fraction $\frac{k}{k'}$ serait moins approchée que $\frac{P}{P'}$; donc ce numérateur est au moins égal à 1; donc, par compensation, $k' > P'$.

En renversant les fractions $\frac{N}{N'}$, $\frac{k}{k'}$, $\frac{P}{P'}$, on aurait

$$\frac{N'}{N} > \frac{k'}{k} > \frac{P'}{P};$$

d'où, par un calcul semblable au précédent, $k > P$.

Ainsi, pour qu'une fraction $\frac{k}{k'}$ soit plus approchée de x que la réduite $\frac{P}{P'}$, il faut qu'elle soit plus *compliquée* que cette réduite : cette conclusion est précisément l'équivalent de la proposition énoncée.

IV. — *Convergentes intermédiaires.*

17. Dans la formule générale (1), remplaçons q par les nombres entiers 0, 1,..., q; nous formerons une suite de fractions

$$\frac{N}{N'}, \quad \frac{N+P}{N'+P'}, \ldots, \quad \frac{N+iP}{N'+iP'}, \quad \frac{N+(i+1)P}{N'+(i+1)P'}, \ldots, \quad \frac{Q}{Q'}.$$

Les termes extrêmes de cette suite sont les réduites $\frac{N}{N'}$, $\frac{Q}{Q'}$. Quant aux autres fractions, elles jouissent de toutes les propriétés des réduites, attendu que ces propriétés sont une conséquence des équations (2) et (3), lesquelles subsistent évidemment, lorsqu'à la place du quotient incomplet q on met un entier quelconque. Les fractions dont il s'agit sont appelées *convergentes intermédiaires*.

18. On a

$$\frac{N+iP}{N'+iP'} - \frac{N+(i+1)P}{N'+(i+1)P'} = \frac{NP'-N'P}{(N'+iP')[N'+(i+1)P']},$$

quantité de même signe que $\frac{N}{N'} - \frac{P}{P'}$. Conséquemment, lorsque $\frac{N}{N'}$ est une réduite de rang impair, les convergentes intermédiaires vont en augmentant. Elles vont au contraire en diminuant, quand $\frac{N}{N'}$ est de rang pair.

19. Au lieu de supposer le nombre entier i compris entre 0 et q, on pourrait le faire croître de $-\infty$ à $+\infty$; alors l'expression $z = \frac{N + iP}{N' + iP'}$ varierait de la manière suivante :

1°. Pour $i = -\infty$, $z = \frac{P}{P'}$;

2°. De $i = -\infty$ à $i = -1$, z marche de $\frac{P}{P'}$ vers $\frac{P - N}{P' - N'}$, c'est-à-dire que z augmente si $\frac{N}{N'}$ est de rang impair;

3°. Pour $i = 0$, $z = \frac{N}{N'}$, quantité moindre que $\frac{P - N}{P' - N'}$; donc z a diminué;

4°. De $i = 0$ à $i = \infty$, z augmente;

5°. Pour $i = \infty$, $z = \frac{P}{P'}$ (*).

20. Soit la fraction continue $x = 4, 3, 7, 4, 5$. Les réduites *principales* sont

$$\frac{4}{1},\ \frac{13}{3},\ \frac{95}{22},\ \frac{393}{91},\ \frac{2060}{477}.$$

Par des additions successives, elles donnent les convergentes *intermédiaires*

$$\frac{17}{4},\ \frac{30}{7},\ \frac{43}{10},\ \frac{56}{13},\ \frac{69}{16},\ \frac{82}{19},\ldots,\ \frac{108}{25},\ \frac{203}{47},\ \frac{298}{69},\ldots,$$
$$\frac{488}{113},\ \frac{881}{204},\ \frac{1274}{295},\ \frac{1667}{386}.$$

On peut même, pour plus de régularité, prendre $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$ pour premières convergentes principales, et l'on a alors

(*) On pourrait remarquer que cette discussion revient à celle de l'hyperbole représentée par $y = \frac{N + Px}{N' + P'x}$.

cette suite :

$$\left(\frac{0}{1}\right),\ \left(\frac{1}{0}\right),\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \left(\frac{4}{1}\right),\ \frac{5}{1},\ \frac{9}{2},\ \left(\frac{13}{3}\right),\ \frac{17}{4},\ \frac{30}{7},\ \frac{43}{10},$$
$$\frac{56}{13},\ \frac{69}{16},\ \frac{82}{19},\ \left(\frac{95}{22}\right),\ \frac{108}{25},\ \frac{203}{47},\ \frac{298}{69},\ \left(\frac{393}{91}\right),\ \frac{488}{113},$$
$$\frac{881}{204},\ \frac{1274}{295},\ \frac{1667}{386},\ \left(\frac{2060}{477}\right).$$

V. — *Réduites non consécutives.*

21. Considérons plusieurs réduites successives $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, $\frac{R}{R'}$, $\frac{S}{S'}$,..., et cherchons les relations qui existent entre les deux termes de la première et les deux termes de chacune des autres. A cet effet, prenons les équations

$$Q = Pq + N,\quad R = Qr + P,\quad S = Rs + Q,\quad T = St + R,$$
$$Q' = P'q + N',\quad R' = Q'r + P',\quad S' = R's + Q',\quad T' = S't + R',\ \text{etc.}$$

Elles donnent successivement

$$QP' - Q'P = \pm 1,\quad RP' - R'P = \pm r,$$
$$SP' - S'P = \pm(rs + 1),\quad TP' - T'P = \pm[(ts + 1)t + r],\ \text{etc.}$$

D'après ces valeurs, dont la loi est évidente, il s'ensuit que *si l'on considère la fraction continue $x = q, r, s,\ldots$, les dénominateurs des réduites successives seront les valeurs des fonctions $QP' - Q'P$, $RP' - R'P$,..., prises avec leurs signes ou avec des signes contraires, selon que q est de rang pair ou de rang impair.*

22. Comme application, soit la fraction continue

$$x = 4,\ 3,\ 7,\ 4,\ 5,$$

dont les réduites sont $\frac{4}{1}$, $\frac{13}{3}$, $\frac{95}{22}$, $\frac{393}{91}$, $\frac{2060}{477}$. Si nous considérons la fraction continue $7, 4, 5$, les réduites de celle-ci seront $\frac{7}{1}, \frac{29}{4}, \frac{152}{21}$; et nous aurons en effet

$$95.3 - 22.13 = -1, \quad 393.3 - 91.13 = -4,$$
$$2060.3 - 477.13 = -21.$$

23. Pour arriver à un théorème plus général que celui qui vient d'être démontré, changeons pour un instant notre notation, et représentons par $q_1, q_2, q_3, q_4, \ldots, q_n$ les termes de la fraction continue x. Si nous réduisons en fraction ordinaire la fraction continue

$$y = q_h, \ q_{h+1}, \ q_{h+2}, \ldots, \ q_k,$$

le numérateur de cette fraction sera une certaine *fonction des indices* h, k, laquelle pourra être représentée par $N_{h,k}$.

En vertu de cette convention, le numérateur de x sera $N_{1,n}$. Quant au dénominateur, il est évidemment égal au numérateur de la fraction $q_2, q_3, q_4, \ldots$, c'est-à-dire égal à $N_{2,n}$. Nous aurons donc

$$x = q_1, \ q_2, \ q_3, \ldots, \ q_n = \frac{N_{1,n}}{N_{2,n}}.$$

La relation $QP' - Q'P = \pm 1$ deviendra maintenant

$$(a) \qquad N_{1,h+1} . N_{2,h} - N_{2,h+1} . N_{2,h} = (-1)^{h+1},$$

en supposant que h soit le rang de la réduite $\frac{P}{P'} = \frac{N_{1,h}}{N_{2,h}}$.

De même, les relations

$$RP' - R'P = \pm r, \quad SP' - S'P = \pm (rs + 1),$$
$$TP' - T'P = \pm [(rs + 1) t + r],$$

deviendront

$$N_{1,h+2} . N_{2,h} - N_{2,h+2} . N_{1,h} = (-1)^{h+1} N_{h+2,h+2},$$
$$N_{1,h+3} . N_{2,h} - N_{2,h+3} . N_{1,h} = (-1)^{h+1} N_{h+2,h+3},$$
$$N_{1,h+4} . N_{2,h} - N_{2,h+4} . N_{1,h} = (-1)^{h+1} N_{h+2,h+4},$$

et, en général,

(b) $$N_{1,k}.N_{2,h} - N_{2,k}.N_{1,h} = (-1)^{h+1} N_{h+2,k}.$$

Si, dans cette dernière équation, nous supposons $k = h + 1$, elle donnera

$$N_{1,h+1}.N_{2,h} - N_{2,h+1}.N_{1,h} = (-1)^{h+1} N_{h+2,h+1}.$$

D'après l'équation (a), ce second membre doit se réduire à $(-1)^{h+1}$; donc $N_{h+2,h+1} = 1$: c'est-à-dire que, pour la commodité du calcul, nous supposerons généralement

$$N_{n+1,n} = 1.$$

De même, en prenant $k = h = n$, on trouve, au moyen de la formule (b),

$$N_{n+2,n} = 0.$$

24. Dans cette même formule (b), faisons $h = 1$; nous obtiendrons

$$N_{1,k}.N_{2,1} - N_{2,k}.N_{1,1} = N_{3,k},$$

ou simplement

$$N_{1,k} - N_{2,k}.q_1 = N_{3,k};$$

d'où

$$N_{2,k} = \frac{N_{1,k} - N_{3,k}}{q_1}:$$

et, en changeant k en h,

$$N_{2,h} = \frac{N_{1,h} - N_{3,h}}{q_1}.$$

Ces valeurs, substituées dans la formule (b), donnent

(c) $$N_{1,k}.N_{3,h} - N_{3,k}.N_{1,h} = (-1)^{h+2} N_{1,1}.N_{h+2,k},$$

à cause de $q_1 = N_{1,1}$.

Dans cette nouvelle équation, faisons $h = 2$, nous obtiendrons

$$N_{1,k} - N_{3,k}.N_{1,2} = N_{1,1}.N_{4,k}.$$

d'où

$$N_{3,k} = \frac{N_{1,k} - N_{1,1}.N_{4,k}}{N_{1,2}}.$$

De même,

$$N_{3,h} = \frac{N_{1,h} - N_{1,1}.N_{4,h}}{N_{1,2}}.$$

Ces valeurs donnent, par la substitution dans (c),

$$N_{1,k}.N_{4,h} - N_{4,k}.N_{1,h} = (-1)^{h+3} N_{1,2}.N_{h+2,k}.$$

En continuant de la même manière, on arrive à la formule suivante, due à Kramp :

$$(7) \quad N_{1,k}.N_{g,h} - N_{g,k}.N_{1,h} = (-1)^{h+g-1} N_{1,g-2}.N_{h+2,k}.$$

25. *Application*. Soit $x = 3, 2, 1, 4, 2, 1, 3, 5, 2, 1$. Les numérateurs des réduites sont

$$3,\ 7,\ 10,\ 47,\ 104,\ 151,\ 557,\ 2936,\ 6429,\ 9365.$$

Prenons $k = 10$, $h = 7$, $g = 3$; nous aurons $N_{1,k} = 9365$, $N_{1,h} = 557$, $N_{1,g-2} = 3$.

Quant aux fonctions représentées par $N_{g,h}$, $N_{g,k}$, $N_{h+2,k}$, elles sont égales, respectivement, aux numérateurs des fractions continues $y = 1, 4, 2, 1, 3$; $z = 1, 4, 2, 1, 3, 5, 2, 1$; $t = 2, 1$. On trouve $N_{g,h} = 59$, $N_{g,k} = 992$, $N_{h+2,k} = 3$. L'équation (7) donne donc

$$9365.59 - 992.557 = -3.3;$$

ce qui est exact.

VI. — *Fractions continues illimitées.*

26. Jusqu'à présent, nous n'avons considéré que des fractions continues *limitées*, c'est-à-dire composées d'un nombre *fini* de termes. Supposons maintenant que la fraction continue soit *illimitée*, et examinons d'abord ce que l'on devra appeler *valeur* d'une pareille fraction.

Soient x_1, x_2, x_3, etc., les résultats que l'on obtient quand on termine la fraction à son premier terme, ou à ses deux premiers termes, ou à ses trois premiers, etc. D'après ce qui a été vu ci-dessus (nos 10 et suivants), nous aurons

$$x_1 < x_3 < x_5 < x_7 \ldots,$$
$$x_2 > x_4 > x_6 > x_8 \ldots;$$

c'est-à-dire que les réduites de rang impair vont en augmentant, et que celles de rang pair vont en diminuant. D'ailleurs, chaque terme de la seconde ligne est plus grand que le terme correspondant de la première; et la différence entre ces deux termes peut, évidemment, devenir moindre que toute quantité donnée, si ces deux termes, c'est-à-dire si ces deux réduites, occupent des rangs assez éloignés.

Il résulte de là que les réduites de rang impair et les réduites de rang pair tendent vers une certaine limite, laquelle est toujours comprise entre deux réduites consécutives quelconques. Cette limite est la *valeur* de la fraction continue.

27. Ce que nous venons de dire suppose, bien entendu, les quotients incomplets *entiers* et *positifs*. Avec cette restriction, les propriétés démontrées pour les fractions continues limitées subsistent évidemment pour celles qui ont une infinité de termes. Mais si l'on admettait des quotients incomplets négatifs, les réduites pourraient n'avoir pas de limite déterminée.

Soit, par exemple, la fraction

$$1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \ldots}}}$$

En prenant un nombre de termes de plus en plus considérable, on obtient les résultats *périodiques*

$$1, 0, \infty, 1, 0, \infty, \ldots,$$

lesquels, évidemment, ne tendent vers aucune limite.

28. *Toute fraction continue illimitée a pour valeur une quantité incommensurable, et réciproquement.*

Cette proposition est évidente par les nos 2 et 3.

29. Il est facile de réduire en série toute fraction continue, limitée ou illimitée. En effet, considérons d'abord la fraction continue limitée $x = a, b, c, d, \ldots, p, q$.

Nous aurons, par les propriétés démontrées dans le § II,

$$\frac{A}{A'} = \frac{a}{1}, \quad \frac{B}{B'} - \frac{A}{A'} = \frac{1}{A'B'}, \quad \frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} = -\frac{1}{B'C'}, \ldots,$$
$$\frac{Q}{Q'} - \frac{P}{P'} = \pm\frac{1}{P'Q'}.$$

Donc, en ajoutant toutes ces équations,

$$\frac{Q}{Q'} = x = a + \frac{1}{A'B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{C'D'} - \ldots \pm \frac{1}{P'Q'}.$$

Soit par exemple $x = 3, 2, 1, 7, 4, 5, 6, 2$. Les dénominateurs des réduites sont 1, 2, 3, 23, 95, 498, 3083, 6664; et nous aurons

$$x = 3 + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.23} - \frac{1}{23.95} + \frac{1}{95.498}$$
$$- \frac{1}{498.3083} + \frac{1}{3083.6664}.$$

30. Que la fraction continue soit limitée ou illimitée, les réduites approchent de plus en plus de la valeur de cette fraction. Or, le second membre de l'équation ci-dessus étant limité à ses deux premiers termes, à ses trois premiers termes, etc., exprime les valeurs des réduites $\frac{B}{B'}$, $\frac{C}{C'}$, etc. Par conséquent, si x est une fraction continue *illimitée*, on aura, en série *convergente*,

$$(8) \qquad x = a + \frac{1}{A'B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{C'D'} - \frac{1}{D'E'} + \ldots$$

De plus, l'erreur que l'on commet en s'arrêtant à un terme quelconque est moindre que la valeur absolue de ce terme : c'est ce qui résulte des n^os **12** et **13**.

31. Si une quantité incommensurable x est développée en série convergente, on pourra se servir de cette série pour développer x en fraction continue. En effet, l'équation (8), dans laquelle $A' = 1$, donne immédiatement les dénominateurs B', C', D', etc., des réduites. On obtient ensuite les termes b, c, d, etc., à l'aide des formules $b = B'$, $c = \frac{C' - A'}{B'}$, $d = \frac{D' - B'}{C'}$, etc. En général, ces termes a, b, c, d, etc., ne seront pas entiers et positifs; mais cette circonstance n'empêchera pas le développement trouvé d'être *convergent*, car on a seulement remplacé la série convergente par une autre expression qui lui est équivalente, et qui n'en diffère que par la forme.

32. Comme application, développons en fraction continue le logarithme népérien de 2. On a

$$l.2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots;$$

par suite,

$$a = 0,\ B' = 1,\ C' = 2,\ D' = \frac{3}{2},\ E' = \frac{2.4}{3},\ F' = \frac{3.5}{2.4},$$
$$G' = \frac{2.4.6}{3.5},\ H' = \frac{3.5.7}{2.4.6},\ \text{etc.};$$

puis

$$b = B' = 1,\ c = 1,\ d = \frac{1}{2^2},\ e = \frac{\frac{2.4}{3} - 2}{\frac{3}{2}} = \frac{2^2}{3^2},$$

$$f = \frac{\frac{3.5}{2.4} - \frac{3}{2}}{\frac{2.4}{3}} = \frac{3^2}{2^2.4^2},\ g = \frac{\frac{2.4.6.}{3.5} - \frac{2.4}{3}}{\frac{3.5}{2.4}} = \frac{2^2.4^2}{3^2.5^2},\ \text{etc.}$$

Conséquemment,

$$l.2 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{1}{4} + \cfrac{1}{\frac{4}{9} + \cfrac{1}{\frac{9}{4.16} + \ldots}}}}}$$

Pour simplifier cette expression, observons que

$$\cfrac{1}{\frac{1}{4} + \cfrac{1}{\frac{4}{9} + \cfrac{1}{\frac{9}{4.16} + \cfrac{1}{\frac{4.16}{9.25} + \ldots}}}} = \cfrac{4}{1 + \cfrac{1}{\frac{1}{9} + \cfrac{1}{\frac{9}{16} + \cfrac{1}{\frac{16}{9.25} + \ldots}}}}$$

De même,

$$\cfrac{1}{\frac{1}{9} + \cfrac{1}{\frac{9}{16} + \cfrac{1}{\frac{16}{9.25} + \ldots}}} = \cfrac{9}{1 + \cfrac{1}{\frac{1}{16} + \cfrac{1}{\frac{16}{25} + \ldots}}},$$

et ainsi de suite. Par conséquent,

$$l.2 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{9}{1 + \cfrac{16}{1 + \cfrac{25}{1 + \ldots}}}}}}$$

33. Pour seconde application, prenons la série qui donne le rapport de la circonférence au diamètre :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

Nous aurons ici

$$a=0,\ B'=1,\ C'=3,\ D'=\frac{5}{3},\ E'=\frac{3.7}{5},\ F'=\frac{5.9}{3.7},\ldots;$$

d'où

$$b=1,\ c=2,\ d=\frac{2}{9},\ e=\frac{2.9}{25},\ f=\frac{2.25}{9.49},\ \text{etc.}$$

Le développement cherché sera donc

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{2}{9}+\cfrac{1}{\frac{2.9}{25}+\cfrac{1}{\frac{2.25}{9.49}+\ldots}}}}}$$

Ce développement subit une simplification analogue à celle que nous avons indiquée tout à l'heure; et l'on obtient la formule suivante, due à Brouncker :

$$\frac{\pi}{4}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\ldots}}}}}$$

34. Si l'on appliquait la même méthode à la série *harmonique*

$$x=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots,$$

on trouverait

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{-\frac{5}{2^2}+\cfrac{1}{\frac{2^2.7}{3^2}+\cfrac{1}{-\frac{3^2.9}{2^2.4^2}+\ldots,}}}}$$

ou

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{4}{-5 + \cfrac{9}{7 + \cfrac{16}{-9 + \ldots}}}},$$

ou encore, par une transformation simple,

$$x = \cfrac{1}{+1 + \cfrac{1}{-3 + \cfrac{4}{+5 + \cfrac{9}{-7 + \cfrac{16}{+9 + \ldots}}}}}$$

Or la série harmonique est *divergente,* c'est-à-dire que la somme de ses termes peut croître au delà de toute limite. Conséquemment, la fraction continue que nous venons d'obtenir est pareillement divergente; et les réduites de cette fraction, au lieu de tendre vers une limite finie, peuvent dépasser toute quantité assignable.

35. Pour dernière application, cherchons le développement, en fraction continue, de la base des logarithmes népériens.

On a

$$e^{-1} = \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \frac{1}{1.2.3.4.5} \cdots;$$

par suite, en comparant à la formule (8),

$$a = 0, \quad A' = 1, \quad B' = 2, \quad C' = 1.3,$$
$$D' = 2.4, \quad E' = 1{,}3.5, \quad F' = 2.4.6, \ldots,$$

puis

$$b = 2, \quad c = 1, \quad d = \frac{2}{1}, \quad e = \frac{1.3}{2}, \quad f = \frac{2.4}{1.3}, \quad g = \frac{1.3.5}{2.4}, \ldots$$

Donc

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{2}{1} + \cfrac{1}{\frac{1.3}{2} + \cfrac{1}{\frac{2.4}{1.3} + \cfrac{1}{\frac{1.3.5}{2.4} + \dots}}}}}.$$

VII. — *Fractions continues périodiques.*

36. Une fraction continue *périodique* est celle dont les termes se reproduisent dans le même ordre, à partir d'un certain rang. Elle est dite *périodique simple,* lorsque le premier quotient incomplet fait partie de la période. Dans le cas contraire, elle est appelée fraction périodique *mixte*.

Les fractions continues périodiques jouissent d'un grand nombre de propriétés remarquables, lesquelles reposent toutes sur la proposition suivante.

37. *Soit une fraction périodique simple* $m, n, p, q, m, n, p, q, \dots$: *la valeur* y *de cette fraction sera donnée par l'équation*

$$y = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{y}}}}.$$

En désignant par y_i et y_{i+1} les résultats que l'on obtient en prenant i périodes et $i+1$ périodes, on a évidemment

$$y_{i+1} = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{y}}}}.$$

Mais la différence entre deux réduites consécutives peut devenir moindre que toute quantité donnée; il en est de même pour deux réduites distinctes d'un nombre *déterminé* de rangs. car cette dernière différence est égale à la somme des différences entre les réduites intermédiaires et consécutives. Donc y_ι et $y_{\iota+1}$ ont la même limite, laquelle est y.

38. On peut calculer de proche en proche y_1, y_2, $y_3, \ldots, y_\iota$, $y_{\iota+1}$ sans passer par les réduites intermédiaires. En effet, représentons par $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ les réduites répondant aux termes p, q de la première période; et soit $\frac{R}{R'}$ la réduite qui suit $\frac{Q}{Q'}$, de manière que

$$\frac{R}{R'} = \frac{Qm + P}{Q'm + P'}.$$

Si, dans cette valeur, nous remplaçons m par y_ι, nous obtiendrons $y_{\iota+1}$; donc, en général,

$$y_{\iota+1} = \frac{Qy_\iota + P}{Q'y_\iota + P'}.$$

39. Soit $\frac{T}{T'}$ la fraction irréductible équivalente à y_ι, nous aurons

$$(9) \qquad y_{\iota+1} = \frac{QT + PT'}{Q'T + P'T'};$$

et je dis que la fraction contenue dans le second membre sera irréductible.

Soient U, U' les deux termes de cette fraction, savoir:

$$U = QT + PT', \quad U' = Q'T + P'T'.$$

Entre ces équations, éliminons successivement T et T'; nous trouverons

$$UQ' - U'Q = (PQ' - P'Q)T', \quad UP' - U'P = -(PQ' - P'Q)T.$$

Mais $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$ sont deux réduites consécutives : donc

$$PQ' - P'Q = \pm 1;$$

par suite,

$$UQ' - UQ' = \pm T', \quad UP' - U'P = \mp T.$$

Ces équations prouvent que tout facteur commun à U et à U' devrait diviser T et T'. Si donc, comme nous l'avons supposé, $\frac{T}{T'}$ est irréductible, $\frac{U}{U'}$ sera pareillement irréductible.

D'ailleurs, la fraction $\frac{Q}{Q'}$, qui donne la valeur de la première période, est une réduite ; donc toutes les fractions obtenues par l'application de la formule (9) sont des réduites.

40. Soient, comme précédemment,

$$y_i = \frac{T}{T'}, \quad y_{i+1} = \frac{U}{U'}.$$

D'après le n° **21**, si l'on réduit en fraction ordinaire

$$m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q}}},$$

le dénominateur de cette fraction sera la valeur de la fonction $TU' - T'U$, prise avec son signe ou avec un signe contraire. Or ce dénominateur est celui de y_1, c'est-à-dire Q' ; donc

$$TU' - T'U = \pm Q' \; (*).$$

41. Plus généralement, *si dans une fraction périodique, simple ou mixte, on considère deux réduites distantes d'autant de rangs que l'indique le nombre des*

(*) Dans l'application de cette formule, on devra prendre le signe +, si le nombre des termes de la période est *pair*. Et si ce nombre est *impair*, on prendra le signe + ou le signe —, selon que i sera *pair* ou *impair*.

termes de la période, la différence des produits en croix des termes de ces deux réduites sera égale au dénominateur de la fraction continue équivalente à la période, celle-ci étant comptée à partir de la première des deux réduites.

Ce théorème, aussi bien que le précédent, est une conséquence immédiate de la propriété démontrée au n° **21**.

Soit, comme application, la fraction

$$x = 2,\ 3,\ 1,\ 3,\ 2,\ 1,\ 3,\ 2,\ 1,\ldots,$$

ou simplement

$$x = 2,\ 3\ (1,\ 3,\ 2).$$

Les réduites consécutives sont

$$\frac{2}{1},\ \frac{7}{3},\ \frac{9}{4},\ \frac{34}{15},\ \frac{77}{34},\ \frac{111}{49},\ \frac{410}{181},\ \frac{931}{411},\ \frac{1341}{592},\ \frac{4954}{2187},\ldots.$$

D'un autre côté, l'on a

$$1,\ 3,\ 2 = \frac{9}{7};\quad 3,\ 2,\ 1 = \frac{10}{3};\quad 2,\ 1,\ 3 = \frac{11}{4}.$$

Or,

$$1^{\circ}.\quad 7\cdot 34 - 3\cdot 77 = -(77\cdot 411 - 34\cdot 931) = \ldots = +7;$$
$$2^{\circ}.\quad 9\cdot 49 - 4\cdot 111 = -(111\cdot 592 - 49\cdot 1341) = \ldots = -3;$$
$$3^{\circ}.\quad 34\cdot 181 - 15\cdot 410 = -(410\cdot 2187 - 181\cdot 4954) = \ldots = +4.$$

42. D'après l'équation $UQ' - U'Q = \pm T'$, nous voyons que si T' est divisible par Q', U' sera pareillement divisible par ce facteur. Or le dénominateur de y_1 est précisément Q': *donc les dénominateurs de toutes les réduites y_2, y_3,..., sont divisibles par le dénominateur de y_1.*

VIII. — *Recherche des valeurs des fractions continues périodiques.*

43. *Toute fraction continue périodique est équivalente à l'une des racines d'une équation du second degré, à coefficients rationnels.*

1°. Soit d'abord une fraction périodique simple

$$y = (m,\ n,\ p,\ q).$$

Nous aurons, d'après le n° 37,

$$y = m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{y}}}};$$

d'où, en représentant par $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$ les réduites répondant aux termes p, q,

$$y = \frac{Qy + P}{Q'y + P'}.$$

Ainsi, la valeur y de la fraction continue périodique simple sera donnée par l'équation

$$(10)\qquad Q'y^2 + (P' - Q)y - P = 0,$$

laquelle a ses racines *de signes contraires*. Il est d'ailleurs manifeste que la racine positive seule répond à la question.

2°. Si la période avait un seul terme m, l'équation qui donne y serait simplement $y = m + \frac{1}{y}$ ou

$$(11)\qquad y^2 - my - 1 = 0.$$

3° Soit maintenant une fraction périodique mixte

$$x = a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ (m,\ n,\ p,\ q).$$

En représentant encore par y la fraction périodique simple $(m,\ n,\ p,\ q)$, nous aurons

$$x = a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ y;$$

d'où, en appelant $\frac{D}{D'}$, $\frac{E}{E'}$ les réduites qui correspondent aux termes d, c,

$$x = \frac{Ey + D}{E'y + D'}. \tag{12}$$

Cette relation donne

$$y = -\frac{D'x - D}{E'x - E};$$

puis, par la substitution dans (12),

$$\left\{\begin{array}{l} Q'(D'x - D)^2 - (P' - Q)(D'x - D)(E'x - E) \\ \qquad - P(E'x - E)^2 = 0. \end{array}\right. \tag{13}$$

Or cette équation est du second degré, et ses coefficients sont rationnels

4°. Si la partie non périodique avait un seul terme a, on aurait $x = a + \frac{1}{y}$; et l'équation (13) serait remplacée par

$$P(x - a)^2 - (P' - Q)(x - a) - Q' = 0. \tag{14}$$

5°. Si la partie périodique et la partie non périodique n'ont chacune qu'un seul terme, l'équation (11) donne

$$(x - a)^2 + m(x - a) - 1 = 0. \tag{15}$$

6°. Enfin, si $x = \frac{1}{y}$, d'où $y = \frac{1}{x}$, les équations (10) ou (11) donneront encore des équations du second degré en x.

La proposition énoncée est donc démontrée dans tous les cas. Mais nous pouvons aller plus loin et discuter les équations (10), (11), (12), etc. A cet effet, établissons d'abord le lemme suivant.

44. *Soit x une fraction continue, plus grande que l'unité, et soit x' la fraction continue inverse. Si $\frac{D}{D'}$, $\frac{E}{E'}$ sont les deux dernières réduites de x, celles de x' seront $\frac{E'}{D'}$, $\frac{E}{D}$.*

Une fraction continue x' est dite *inverse* d'une fraction continue x, lorsque les termes de la première sont ceux de la seconde, écrits dans un ordre inverse.

Cela posé, soit $x = a, b, c, d, e$; d'où $x' = e, d, c, b, a$. De $E = De + C$ l'on déduit $\frac{E}{D} = e + \frac{1}{\frac{D}{C}}$. Par la même raison, $\frac{D}{C} = d + \frac{1}{\frac{C}{B}}$, et ainsi de suite jusqu'à $\frac{B}{a} = b + \frac{1}{a}$. Donc $\frac{E}{D} = e,\ d,\ c,\ b,\ a = x'$. On verrait de même que $\frac{E'}{D'} = e, d, c, b$.

45. Si la fraction continue x est *symétrique*, c'est-à-dire si ses termes sont tels que a, b, c, b, a, alors $x' = x$; donc $\frac{E'}{D'} = \frac{D}{D'}$, ou simplement $E' = D$. Ainsi, *dans une fraction continue symétrique, le dénominateur de la dernière réduite est égal au numérateur de l'avant-dernière.*

46. *Remarque.* On peut de bien des manières parvenir à l'équation qui donne la valeur d'une fraction continue périodique. En effet, on ne changera pas cette valeur si l'on comprend, dans la partie non périodique, plusieurs termes appartenant à la période, ou si l'on prend plusieurs fois celle-ci, au lieu de la prendre une seule fois.

Soit, par exemple, $x = 2, 3, 5\ (1, 4)$.

Si nous posons $y = (1, 4)$, nous aurons

$$x = 2, 3, 5, y, \quad y = 1, 4, y;$$

d'où

$$x = \frac{37y + 7}{16y + 3}, \quad y = \frac{5y + 1}{4y + 1};$$

puis, par l'élimination de y,

$$28x^2 - 134x + 137 = 0.$$

Mais si nous regardons, comme appartenant à la partie non périodique, les termes 1, 4, 1 de la période, et si nous posons $y' = (4, 1, 4, 1)$, nous aurons

$$x = 2, 3, 5, 1, 4, 1, y', \qquad y' = 4, 1, 4, 1, y';$$

puis

$$x = \frac{257y' + 213}{111y' + 92}, \qquad y' = \frac{29y' + 24}{6y' + 5}.$$

L'élimination de y' donne ensuite l'équation trouvée ci-dessus.

47. Revenons maintenant au n° 43. En discutant les différents cas qui se peuvent présenter, et en supposant, pour plus de simplicité, que la fraction périodique soit *plus grande que l'unité*, nous obtiendrons les théorèmes suivants :

1°. *L'équation* (10), *à laquelle donne lieu une fraction périodique simple, a ses racines de signes contraires. Et si on désigne par* α *la fraction continue inverse de la fraction proposée, la racine négative de cette équation est* $-\frac{1}{\alpha}$.

D'abord, l'équation (10) a ses racines de signes contraires, puisque son dernier terme est négatif. En second lieu, d'après le n° 44, la fraction inverse serait donnée par l'équation

$$y' = \frac{Qy' + Q'}{Py' + P'},$$

ou

$$Py'^2 + (P' - Q)y' - Q' = 0.$$

Et il est évident que cette dernière équation ne diffère de (10) que par le changement de y en $-\frac{1}{y'}$.

2°. *Si la période a un seul terme, l'équation résultante a ses racines réciproques, et de signes contraires.*

En effet, dans l'équation (11), le produit des racines est égal à -1.

3°. *Plus généralement, si la période est symétrique, l'équation du second degré a encore ses racines réciproques, et de signes contraires.*

D'après le n° 45, le dénominateur Q' est égal au numérateur P; donc l'équation (15) devient

$$y^2 + \frac{P'-Q}{P}y - 1 = 0.$$

4°. *L'équation* (13), *à laquelle donne lieu une fraction périodique mixte qui a plusieurs termes non périodiques, a ses racines positives.*

L'équation (13) résulte de l'élimination de y entre les deux relations

$$Q'y^2 + (P'-Q)y - P = 0, \tag{10}$$

$$x = \frac{Ey + D}{E'y + D'}. \tag{12}$$

Il s'agit donc de faire voir que si l'on substitue dans la formule (12), successivement les deux racines de l'équation (10), les résultats obtenus seront positifs. Cela est évident pour la valeur positive de y. Quant à la valeur négative, j'observe d'abord qu'elle est comprise entre $-\frac{P}{Q'} : \frac{P}{P'}$ et $-\frac{P}{Q'} : \frac{Q}{Q'}$, c'est-à-dire entre $-\frac{P'}{Q'}$ et $-\frac{P}{Q}$. Ces valeurs, mises à la place de y dans (12), donnent

$$\frac{DQ' - EP'}{D'Q' - E'P'}, \quad \frac{DQ - EP}{D'Q - E'P}.$$

Actuellement, nous avons

$$e < \frac{E}{D} < e + 1, \quad q < \frac{Q}{P} < q + 1,$$

$$e < \frac{E'}{D'} < e + 1, \quad q < \frac{Q'}{P'} < q + 1.$$

D'ailleurs e est différent de q, sans quoi e ferait partie de la période. Soit $e < q$; alors

$$\frac{E}{D} < \frac{Q}{P}, \quad \frac{E}{D} < \frac{Q'}{P'}, \quad \frac{E'}{D'} < \frac{Q}{P}, \quad \frac{E'}{D'} < \frac{Q'}{P'}.$$

Ces dernières inégalités prouvent d'abord que si y varie d'une manière continue entre $-\frac{P'}{Q'}$ et $-\frac{Q}{P}$, la valeur de x ne passera ni par *zéro* ni par *l'infini*; donc elle variera d'une manière continue.

Ensuite, ces mêmes inégalités donnent

$$DQ' - EP' > 0, \quad DQ - EP > 0,$$
$$D'Q' - E'P' > 0, \quad D'Q - E'P > 0;$$

d'où

$$\frac{DQ' - EP'}{D'Q' - E'P'} > 0, \quad \frac{DQ - EP}{D'Q - E'P} > 0.$$

Si nous avions supposé $e > q$, nous serions arrivés au même résultat.

Puis donc qu'en remplaçant, dans la formule (12), y par ses deux limites $-\frac{P'}{Q'}$ et $-\frac{P}{Q}$, les résultats de la substitution sont positifs, et que d'ailleurs x varie d'une manière continue dans l'intervalle considéré, nous pouvons conclure que la seconde racine de l'équation (13) est positive et comprise entre

$$\frac{DQ' - EP'}{D'Q' - E'P'} \quad \text{et} \quad \frac{DQ - EP}{D'Q - E'P} \ (*).$$

5°. Si la partie non périodique a un seul terme a, nous aurons $x = a + \frac{1}{y}$, et la seconde racine de l'équation (14) sera comprise entre $a - \frac{Q'}{P'}$ et $a - \frac{Q}{P}$. Or, $\frac{Q'}{P'}$ et $\frac{Q}{P}$ sont

(*) Ici encore, comme au n° 19, on pourrait considérer l'hyperbole représentée par l'équation (11).

compris entre q et $q+1$; donc cette seconde racine est comprise entre $a-q$ et $a-q-1$.

Si a est moindre que q, nos deux limites sont négatives; donc *la seconde racine sera négative et plus grande que l'unité.*

Si a est plus grand que q, les deux limites sont positives ; donc *la seconde racine sera positive.*

6°. Enfin, dans l'équation (15), la seconde racine est comprise entre $a-m$ et $a-m-1$: donc *cette seconde racine sera négative ou positive, selon que a sera inférieur ou supérieur à m.*

48. *Toute racine irrationnelle d'une équation du second degré, à coefficients entiers, se développe en fraction continue périodique.*

Ce théorème, réciproque de celui dont nous venons d'examiner les différents cas, est dû à Lagrange.

Soit

$$(16)\qquad a_1 x^2 - 2b_0 x - a_0 = 0$$

l'équation proposée, dans laquelle a_0, a_1, b_0 sont entiers. Supposons d'abord que les racines soient de signes contraires, auquel cas a_0 et a_1 sont positifs. La racine *positive* sera donnée par la formule

$$x = \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1}}{a_1}.$$

Pour développer cette quantité en fraction continue, représentons par q_1 la partie entière du second membre, laquelle peut être nulle, et posons $x = q_1 + \frac{1}{x_1}$: x_1 sera positif et plus grand que 1.

De $\dfrac{b_0 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1}}{a_1} = q_1 + \dfrac{1}{x_1}$ on tire

$$\frac{1}{x_1} = \frac{b_0 - a_1 q_1 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1}}{a_1},$$

puis

$$x_1 = \frac{a_1}{b_0 - a_1 q_1 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1}}.$$

Pour faire passer le radical au numérateur, multiplions les deux termes par $\sqrt{b_0^2 + a_0 a_1} - (b_0 - a_1 q_1)$; nous obtiendrons

$$x_1 = \frac{a_1(a_1 q_1 - b_0 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1})}{b_0^2 + a_0 a_1 - (b_0 - a_0 q_1)^2} = \frac{a_1 q_1 - b_0 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1}}{a_0 + 2 b_0 q_1 - a_1 q_1^2},$$

en supprimant le facteur commun a_1.

Posons, pour abréger,

$$a_1 q_1 - b_0 = b_1, \quad a_0 + 2 b_0 q_1 - a_1 q_1^2 = a_2;$$

nous aurons, identiquement,

$$b_0^2 + a_0 a_1 = b_1^2 + a_1 a_2,$$

et la valeur de x_1 deviendra

$$x_1 = \frac{b_1 + \sqrt{b_1^2 + a_1 a_2}}{a_2}.$$

Conséquemment, l'inconnue x_1 est racine de l'équation

$$(a) \qquad a_2 x_1^2 - 2 b_1 x_1 - a_1 = 0.$$

Maintenant, je dis que cette équation est de même nature que la proposée, c'est-à-dire qu'elle a ses deux racines de signes contraires. En effet, le coefficient a_2 est ce que devient le premier membre de la proposée quand, après en avoir changé tous les signes, on y remplace x par q_1. Or cette dernière quantité étant, par hypothèse, la partie entière de x, est comprise entre les deux racines de l'équation (16); donc, d'après les propriétés connues des trinômes du second degré,

$$a_1 q_1^2 - 2 b_0 q_1 - a_0 < 0,$$

ou, ce qui est la même chose, $a_2 > 0$. Donc, etc.

L'équation (a) ayant ses racines de signes contraires, il est clair, d'après ce qui précède, que l'inconnue x_1 sera la racine positive de cette équation, et que si l'on désigne par q_2 la partie entière de x_1 (laquelle sera au moins égale à 1), on aura

$$x_1 = q_2 + \frac{1}{x_2},$$

x_2 étant la racine positive de l'équation

$$(b) \qquad a_1 x_2^2 - 2 b_2 x_2 - a_2 = 0,$$

laquelle se déduit de la précédente comme celle-ci a été déduite de la proposée.

Cette équation (b) aura encore ses racines de signes contraires; et ainsi de suite.

Actuellement, la série des égalités

$$b_0^2 + a_0 a_1 = b_1^2 + a_1 a_2 = b_2^2 + a_2 a_3 = \ldots = \mathrm{A},$$

dans lesquelles a_0, a_1, $a_2, \ldots$, b_0^2, b_1^2, $b_2^2, \ldots$, sont des *nombres entiers positifs*, prouve que ces nombres ne peuvent croître indéfiniment, et, conséquemment, qu'*après un nombre limité* d'opérations, on arrivera à une certaine équation

$$a_{n-1} x_n^2 - 2 b_n x_n - a_n = 0,$$

dont les coefficients seront ceux d'une équation déjà obtenue. Conséquemment aussi, *la valeur de x sera périodique*.

Considérons à présent le cas où l'équation du second degré a ses racines de même signe. Nous pouvons les supposer positives : car si elles étaient négatives, il nous suffirait de changer, dans la proposée, x en $-x$.

Cela étant, soit

$$(17) \qquad a_0 x^2 - 2 b_0 x + a_1 = 0$$

l'équation proposée, dans laquelle a_0, a_1, b_0 sont *entiers et positifs*.

La plus grande racine est donnée par la formule

$$x = \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 - a_0 a_1}}{a_0} = q_1 + \frac{1}{x_1}.$$

Si ces deux valeurs de x n'ont pas la même partie entière, l'équation en x_1 aura une racine plus grande que 1, et une racine négative : car l'expression $q_1 + \frac{1}{x_1}$ doit donner les deux valeurs de x. Cette transformée en x_1 ayant ses racines de signes contraires, la racine positive se développera en fraction continue périodique; et il en sera de même pour la plus grande racine de l'équation (17).

Si les deux racines de cette équation ont la même partie entière q_1, la transformée en x_1 aura ses deux racines plus grandes que l'unité positive; et alors nous pourrons raisonner sur cette équation comme nous avons raisonné sur l'équation (17), c'est-à-dire que si les deux valeurs de x_2 n'ont pas la même partie entière, la transformée en x_3 aura ses racines de signes contraires, etc.

Remarquons enfin que nous ne pourrons pas trouver indéfiniment des transformées dont les deux racines aient même partie entière : car, s'il en était ainsi, les deux valeurs de x seraient égales et, conséquemment, rationnelles.

Le théorème de Lagrange est donc démontré.

49. Reprenons le calcul qui donne le développement de la plus grande racine de l'équation proposée.

Dans le cas de l'équation (16), nous avons trouvé

$$x = \frac{b_0 + \sqrt{b_0^2 + a_0 a_1}}{a_1} = q_1 + \frac{1}{x_1}.$$

Nommons N la racine carrée entière de $A = b_0^2 + a_0 a_1$, et posons

$$b_0 + N = d_1, \qquad d_1 = a_1 q_1 + r_1;$$

nous aurons de même

$$b_1 + N = d_2, \qquad d_2 = a_2 q_2 + r_2,$$
$$b_2 + N = d_3, \qquad d_3 = a_3 q_3 + r_3.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Mais

$$b_1 = a_1 q_1 - b_0 = b_0 + N - r_1 - b_0 = N - r_1;$$

donc

$$d_2 = 2N - r_1,$$
$$d_3 = 2N - r_2.$$
$$\dots\dots\dots$$

La *loi des dividendes* est donc connue.

D'un autre côté, la relation $a_2 = a_0 + 2 b_0 q_1 - a_1 q_1^2$ donne

$$a_2 = a_0 + q_1(2 b_0 - a_1 q_1) = a_0 + q_1(2 b_0 - b_1 - b_0)$$
$$= a_0 + q_1(b_0 - b_1) = a_0 + q_1(d_1 - d_2) = a_0 + q_1(r_2 - r_1).$$

De là le tableau suivant, qui donne la marche du calcul :

$$d_1 = b_0 + N = 2N - r_0,$$
$$d_1 = a_1 q_1 + r_1, \qquad d_2 = 2N - r_1, \qquad a_2 = a_0 + q_1(r_1 - r_0),$$
$$d_2 = a_2 q_2 + r_2, \qquad d_3 = 2N - r_2, \qquad a_3 = a_1 + q_2(r_2 - r_1).$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

S'il s'agit de l'équation (17), il suffit de changer le signe de a_1.

50. En appliquant cette méthode à l'équation

$$3x^2 - 8x - 5 = 0,$$

nous aurons

$$a_1 = 3, \qquad b_0 = 4, \qquad a_0 = 5, \qquad A = 31, \qquad N = 5,$$

puis

$$
\begin{array}{lll}
 & d_1 = 9, & a_1 = 3, \\
9 = 3.\ 3 + 0, & d_2 = 10, & a_2 = 5 - 3 = 2, \\
10 = 2.\ 5 + 0, & d_3 = 10, & a_3 = 3, \\
10 = 3.\ 3 + 1, & d_4 = 9, & a_4 = 2 + 3 = 5, \\
9 = 5.\ 1 + 4, & d_5 = 6, & a_5 = 3 + 3 = 6, \\
6 = 6.\ 1 + 0, & d_6 = 10, & a_6 = 5 - 4 = 1, \\
10 = 1.10 + 0, & d_7 = 10, & a_7 = 6, \\
10 = 6.\ 1 + 4, & d_8 = 6, & a_8 = 1 + 4 = 5, \\
6 = 5.\ 1 + 1, & d_9 = 9, & a_9 = 6 - 3 = 3, \\
9 = 3.\ 3 + 0, & d_{10} = 10, & a_{10} = 5 - 3 = 2; \ldots;
\end{array}
$$

donc

$$x' = (3,\ 5,\ 3,\ 1,\ 1,\ 10,\ 1,\ 1).$$

51. Pour la seconde racine, prise positivement, on aurait

$$a_1 = 3, \quad b_0 = -4, \quad a_0 = 5, \quad A = 31, \quad N = 5;$$

puis

$$
\begin{array}{lll}
 & d_1 = 1, & a_1 = 3, \\
1 = 3.\ 0 + 1, & d_2 = 9, & a_2 = 5, \\
9 = 5.\ 1 + 4, & d_3 = 6, & a_3 = 3 + 3 = 6, \\
6 = 6.\ 1 + 0, & d_4 = 10, & a_4 = 5 - 4 = 1, \\
10 = 1.10 + 0, & d_5 = 10, & a_5 = 6, \\
10 = 6.\ 1 + 4, & d_6 = 6, & a_6 = 1 + 4 = 5, \\
6 = 5.\ 1 + 1, & d_7 = 9, & a_7 = 6 - 3 = 3, \\
9 = 3.\ 3 + 0, & d_8 = 10, & a_8 = 5 - 3 = 2, \\
10 = 2.\ 5 + 0, & d_9 = 10, & a_9 = 3, \\
10 = 3.\ 3 + 1, & d_{10} = 9, & a_{10} = 2 + 3 = 5, \\
9 = 5.\ 1 + 4, \ldots; & &
\end{array}
$$

donc

$$-x'' = 0,\ (1,\ 1,\ 10,\ 1,\ 1,\ 3,\ 5,\ 3).$$

52. Prenons encore l'équation

$$62\,x^2 - 400\,x + 645 = 0,$$

laquelle donne

$$x' = \frac{200 + \sqrt{10}}{62}, \quad x'' = \frac{200 - \sqrt{10}}{62}.$$

Pour la première racine,

$$a_1 = 62, \quad a_0 = -645, \quad N = 3, \quad d_1 = 203;$$

puis

$$\begin{array}{lll}
203 = 62.3 + 17, & d_2 = -11, & a_2 = -645 + 3(203 + 11) = -3, \\
-11 = -3.3 - 2, & d_3 = 8, & a_3 = 62 - 3.19 = 5, \\
8 = 5.1 + 3, & d_4 = 3, & a_4 = -3 + 5 = 2, \\
3 = 2.1 + 1, & d_5 = 5, & a_5 = 5 - 2 = 3, \\
5 = 3.1 + 2, & d_6 = 4, & a_6 = 2 + 1 = 3, \\
4 = 3.1 + 1, & d_7 = 5, & a_7 = 3 - 1 = 3, \\
5 = 2.2 + 1, & d_8 = 5, & a_8 = 3, \\
5 = 3.1 + 2, & d_9 = 4, & a_9 = 2 + 1 = 3, \ldots
\end{array}$$

A cause de $d_9 = d_6$ et de $a_9 = a_6$, la période est en évidence; et $x' = 3, 3, 1, 1, (1, 1, 2)$.

On trouve semblablement

$$x'' = 3, 5, (1, 2, 1) = 3, 5, 1, (2, 1, 1).$$

53. La méthode de calcul qui vient d'être appliquée donne une limite supérieure du nombre des transformées de l'équation proposée. En effet, s'il s'agit de l'équation (16), les dividendes sont positifs et moindres que $2N + 1$. De plus, pour un dividende d, il y a au plus d valeurs du diviseur. Donc le nombre des transformées est au plus

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 2N = N(2N + 1).$$

Dans le cas de l'équation (17), comme les dividendes peuvent être négatifs, on obtiendrait une limite du nombre des transformées en doublant $N(2N + 1)$ (*).

(*) On aurait une limite beaucoup plus basse que $N(2N+1)$, si l'on pouvait assigner le nombre des solutions entières et positives de l'equation $z^2 + ut = A$.

53. Nous supposerons maintenant, pour plus de simplicité, que *l'équation donnée a au moins une racine plus grande que l'unité positive :* si le contraire arrivait, il suffirait de changer x en $\frac{1}{x}$ ou en $-\frac{1}{x}$. Cette restriction étant admise, si l'on rapproche le théorème de Lagrange de la discussion faite ci-dessus (47), on arrive aux conséquences suivantes :

1°. *Soit une équation du second degré, dont les racines sont de signes contraires,*

Si l'on développe, en fractions continues, la racine positive x' et la racine négative $-x''$ changée de signe :

La partie périodique de x' sera l'inverse de la partie périodique de x'' ;

Les deux fractions continues sont périodiques simples, excepté quand x'' est > 1, auquel cas x' a un seul terme non périodique.

2°. *Si l'équation du second degré a ses racines positives, ces deux racines se développent suivant deux fractions périodiques mixtes, dans lesquelles les parties périodiques sont inverses l'une de l'autre.*

Ajoutons, pour que cet énoncé ne puisse pas être en défaut :

1°. Qu'une fraction périodique simple, plus petite que l'unité, est nécessairement de la forme

$$x'' = 0, (m, n, p, q, \ldots, s, t);$$

2°. Que pour avoir, dans x' et dans x'', des périodes inverses l'une de l'autre, il pourra être nécessaire de comprendre dans les parties non périodiques, plusieurs termes périodiques.

Ainsi, dans l'exemple du n° 50, nous avons trouvé

$$x' = (3, 5, 3, 1, 1, 10, 1, 1)$$

et

$$x'' = 0, (1, 1, 10, 1, 1, 3, 5, 3).$$

Dans le n° 52, les valeurs des deux racines étaient

$$x' = 3,\ 3,\ 1,\ 1,\ (1,\ 1,\ 2),\quad x'' = 3,\ 5\ (1,\ 2,\ 1),$$

et les périodes n'étaient pas inverses; mais elles le sont devenues quand nous avons eu écrit

$$x'' = 3,\ 5,\ 1,\ (2,\ 1,\ 1).$$

54. *La racine carrée d'un nombre rationnel non carré est exprimée par une fraction périodique mixte ayant un seul terme à sa partie non périodique.*

Soit A le nombre, *plus grand que l'unité,* dont on veut développer la racine carrée en fraction continue. Cette racine est donnée par l'équation $x^2 - \mathrm{A} = 0$, et le théorème est compris dans celui qui précède.

Soit $x' = \sqrt{\mathrm{A}} = a,\ (m,\ n,\ p,\ q,\ r)$, en supposant, pour fixer les idées, que la période ait cinq termes. Représentons par y la fraction périodique simple $(m,\ n,\ p,\ q,\ r)$; nous aurons, d'après le n° 47,

$$-x'' = \sqrt{\mathrm{A}} = a - (r,\ q,\ p,\ n,\ m)$$

ou

$$x'' = -a + (r,\ q,\ p,\ n,\ m).$$

Mais $x'' = x' = a,\ (m,\ n,\ p,\ q,\ r)$; donc

$$-a + r = a,\quad q = m,\quad p = n,\quad n = p,\quad m = q,\quad r = r,\ \text{etc.}$$

La relation $-a + r = a$ donne $r = 2a$, c'est-à-dire que, *dans le développement de $\sqrt{\mathrm{A}}$, le dernier terme de la période est double du terme non périodique.*

Les autres égalités nous apprennent qu'*en faisant abstraction du dernier terme $2a$, la période de $\sqrt{\mathrm{A}}$ est symétrique.*

Par exemple,

$$\sqrt{24} = 4,\ (1,\ 8);\quad \sqrt{73} = 8,\ (1,\ 1,\ 5,\ 5,\ 1,\ 1,\ 16).$$

55. Avant de passer à d'autres propriétés, cherchons

le moyen de *transformer une fraction continue, à termes positifs et négatifs, en une autre dont tous les termes soient positifs*.

Soit, à cet effet, la fraction continue $x = a - \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}}$, dans laquelle a, b, c ne sont pas inférieurs à l'unité. Cette fraction est comprise entre $a - 1$ et a; donc on peut écrire $x = a - 1 + \frac{1}{z}$. En identifiant, on trouve

$$z = \frac{b + \cfrac{1}{c}}{b - 1 + \cfrac{1}{c}} = 1 + \cfrac{1}{b - 1 + \cfrac{1}{c}}.$$

Donc

$$(18) \qquad a - \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = a - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{b - 1 + \cfrac{1}{c}}}.$$

Si $b = 1$, on a simplement

$$a - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{c}} = a - 1 + \frac{1}{1 + c}.$$

56. Comme application, prenons

$$x = 1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{5 - \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{7 - \dots}}}}}}$$

Nous obtiendrons successivement

$$x = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 - \ldots}}} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 - \ldots}}}}}},$$

et enfin

$$x = 0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 5,\ 6,\ 1,\ 7,\ 8,\ 1, \ldots.$$

57. Revenons à l'équation (17),

$$a_0 x^2 - 2 b_0 x + a_1 = 0;$$

et supposons qu'ayant réduit l'une des racines en fraction continue, on veuille conclure de ce développement celui de la seconde racine.

Soit donc, pour fixer les idées,

$$x' = a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ (m,\ n,\ p,\ q).$$

Représentons par y' la valeur de la fraction périodique simple (m, n, p, q); d'où $x' = a, b, c, d, e, y'$.

Il est clair, d'après le n° 43, que pour obtenir la seconde racine x'' de l'équation (17), il suffira de remplacer y', dans l'expression de x', par la racine négative de l'équation $y = m, n, p, q, y$. Or cette racine négative $-y''$ a pour développement $-[0, (q, p, n, m)]$ (47). Conséquemment, en posant $z = (q, p, n, m)$,

$$x'' = a,\ b,\ c,\ d,\ e - z.$$

Il y a maintenant, à cause de e différent de q, deux cas à distinguer :

1°. $e > q$. Alors la fraction

$$e - z = e - q - \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{n + \ldots}},$$

ou, par la formule (18),

$$e - z = e - q - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{p - 1 + \cfrac{1}{n + \ldots,}}}$$

puis

$$x'' = a,\ b,\ c,\ d,\ e - q - 1,\ 1,\ p - 1,\ (n,\ m,\ q,\ p).$$

2°. $e < q$. Dans ce cas,

$$d + \frac{1}{e - z} = d - \cfrac{1}{q - e + \cfrac{1}{p + \ldots}} = d - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{q - e - 1 + \cfrac{1}{p + \ldots,}}}$$

et, conséquemment,

$$x'' = a,\ b,\ c,\ d - 1,\ 1,\ q - e - 1,\ (p,\ q,\ n,\ m).$$

Les mêmes considérations s'étendraient à l'équation (16). On trouvera les formules générales, soit dans le Mémoire de M. Ramus (*Journal de* Crelle, tome XX), soit dans celui de M. Lebesgue (*Journal de* Liouville, tome V).

58. *Applications.* Soit l'équation

$$62x^2 - 400x + 645 = 0.$$

Nous avons trouvé ci-dessus, pour la première racine,

$$x' = 3,\ 3,\ 1,\ 1,\ (1,\ 1,\ 2).$$

Le développement de la seconde racine sera donc

$$x'' = 3,\ 3,\ 0,\ 1,\ 0,\ (1,\ 1,\ 2).$$

Pour simplifier ce développement, observons qu'une fraction telle que $a + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{b + \frac{1}{c}}} = a + b + \frac{1}{c}\cdot$ Par conséquent,

$$x'' = 3,\ 3,\ 0,\ 2,\ (1,\ 2,\ 1) = 3,\ 5,\ (1,\ 2,\ 1);$$

ce qui est exact

Soit encore $x' = 2, 3, 3, 4, 5, (3, 2, 2, 2)$. Nous aurons, d'après la formule ci-dessus,

$$x'' = 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 2,\ 1,\ 1,\ (2,\ 3,\ 2,\ 2).$$

Et, en effet, si l'on remonte aux valeurs de ces deux fractions continues, on trouve qu'elles sont racines de l'équation

$$490\,137\,x^2 - 2\,256\,768\,x + 2\,597\,744 = 0.$$

D'ailleurs, cette équation étant résolue donne

$$x = \frac{1\,128\,384 \pm \sqrt{528}}{490\,137}.$$

59. Pour terminer ce paragraphe, résolvons les équations du second degré auxquelles on est conduit lorsqu'on cherche la valeur d'une fraction continue périodique.

D'abord, l'équation (10) : $Q'y^2 + (P' - Q)y - P = 0$ donne

$$y = \frac{-(P' - Q) \pm \sqrt{(P' - Q)^2 + 4PQ'}}{2Q'}.$$

Mais $PQ' - P'Q = \pm 1$; donc

$$y = \frac{-(P' - Q) \pm \sqrt{(P' + Q)^2 \pm 4}}{2Q'}.$$

Plus généralement, soit l'équation (13)

$$Q'(D'x - D)^2 - (P' - Q)(D'x - D)(E'x - E) - P(E'x - E)^2 = 0,$$

ou

$$\begin{aligned}
&[Q'D'^2 - (P' - Q)D'E' - PD'^2]x^2 \\
&- [2(Q'DD' - PEE') - (P' - Q)(DE' + D'E)]x \\
&+ Q'D^2 - (P' - Q)DE - PE^2 = 0.
\end{aligned}$$

Elle donne

$$x = \frac{2(Q'DD' - PEE') - (P' - Q)(DE' + D'E) \pm \sqrt{L}}{2[Q'D'^2 - PE'^2 - (P' - Q)D'E']},$$

en représentant par L la fonction

$$\begin{gathered}[2(Q'DD'-PEE')-(P'-Q)(DE'+D'E)]^2\\-4[Q'D'^2-PE'^2-(P'-Q)D'E'][Q'D^2-PE^2-(P'-Q)DE].\end{gathered}$$

En développant cette fonction, et ayant égard aux relations $PQ'-P'Q=\pm 1$, $DE'-D'E=\pm 1$, on trouve qu'elle se réduit à $(P'-Q)^2\pm 4$.

Il suit de là que si l'on cherche la valeur d'une fraction continue périodique, le radical contenu dans cette valeur est de la forme $\sqrt{u^2\pm 4}$, laquelle, si u est pair, se réduit à $2\sqrt{u'^2\pm 1}$. Par suite, d'après le théorème de Lagrange, l'irrationnelle $\sqrt{A}$, dans laquelle A est un nombre entier, ne doit différer que par un facteur commensurable λ de l'irrationnelle $\sqrt{u^2\pm 4}$. En d'autres termes, on peut toujours satisfaire à l'équation $A\lambda^2=u^2\pm 4$.

Cette remarque est utile dans l'analyse indéterminée du second degré.

IX. — *Sur le rapport de la circonférence au diamètre.*

60. La formule de Brouncker, démontrée ci-dessus, ne peut pas servir à calculer des valeurs approchées du rapport de la circonférence au diamètre, parce qu'elle est fort peu convergente. On peut, ainsi que nous le ferons voir plus tard, développer ce rapport suivant des fractions continues plus convergentes que celle de Brouncker; mais on ne connaît pas de méthode directe qui permette de le développer en une fraction continue ayant ses termes *entiers*.

Pour suppléer à la connaissance de cette méthode, observons que le rapport dont il s'agit est compris entre

$$3,141\,592\,653\,589\,793 \quad \text{et} \quad 3,141\,592\,653\,589\,794,$$

c'est-à-dire entre les deux fractions

$$\frac{3\,141\,592\,653\,589\,793}{1\,000\,000\,000\,000\,000} \quad \text{et} \quad \frac{3\,141\,592\,653\,589\,794}{1\,000\,000\,000\,000\,000}.$$

Si donc on réduit ces deux quantités en fractions continues, les termes communs aux deux développements appartiendront au développement cherché : c'est là une proposition qu'il est très-aisé de démontrer.

Cela posé, on trouve

$$\frac{3\,141\,592\,653\,589\,793}{1\,000\,000\,000\,000\,000}$$
$$= 3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 15,\ldots;$$
$$\frac{3\,141\,592\,653\,589\,794}{1\,000\,000\,000\,000\,000}$$
$$= 3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 14,\ldots.$$

Conséquemment,

$$\pi = 3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ldots.$$

On aurait obtenu un plus grand nombre de termes si l'on avait pris un plus grand nombre de décimales dans la valeur de π.

61. Formons actuellement les réduites de la fraction continue qui vient d'être écrite, et nous obtiendrons les valeurs suivantes, qui approchent de plus en plus du nombre π, alternativement par défaut et par excès :

$$\frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103\,993}{33\,102},\ \frac{104\,348}{33\,215},$$
$$\frac{208\,341}{66\,317},\ \frac{312\,689}{99\,532},\ \frac{833\,719}{265\,381},\ldots.$$

La première réduite est fort peu approchée.

La deuxième, $\frac{22}{7}$, est égale au *rapport d'Archimède*; elle est approchée à moins de $\frac{1}{7\cdot 106} = \frac{1}{742}$

La troisième réduite donne le *rapport de Rivard.*

La quatrième est égale au rapport trouvé par *Adrien Métius.* Ce rapport, qui n'est guère plus compliqué que celui de Rivard, est beaucoup plus approché, car il diffère de π d'une quantité comprise entre

$$\frac{1}{113.33102} \text{ et } \frac{1}{113(33102+113)},$$

c'est-à-dire entre

$$\frac{1}{3740526} \text{ et } \frac{1}{3753295}.$$

Si, à l'aide des réduites principales que nous venons de calculer, on formait les réduites intermédiaires, on obtiendrait d'autres expressions approchées du rapport de la circonférence au diamètre.

62. Reprenons la fraction continue

$$\pi = 3,\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ldots.$$

Si nous voulons la rendre plus convergente, transformons-la en une autre qui ne renferme plus de termes égaux à l'unité. C'est à quoi nous parviendrons au moyen de la formule (18). Cette formule donne, en effet,

$$15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1}}} = 16-\cfrac{1}{293+\cfrac{1}{1}}.$$

Elle donne ensuite

$$293+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}} = 294-\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$$

$$= 294-\cfrac{1}{3-\cfrac{1}{3}},\ldots;$$

donc

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 - \cfrac{1}{294 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}}}},$$

ou encore

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 + \cfrac{1}{-294 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{-4 + \dots}}}}}.$$

63. Ayant développé π en fraction continue, on peut, à l'aide de la formule (8), développer ce même nombre en série convergente. On trouve ainsi

$$\begin{aligned}\pi = 3 &+ \frac{1}{7} - \frac{1}{7.106} + \frac{1}{106.113} \\ &- \frac{1}{113.33102} + \frac{1}{33102.33215} - \frac{1}{33215.66317} \\ &- \frac{1}{66317.99532} + \frac{1}{99532.265381} - \dots\end{aligned}$$

La série devient encore plus convergente si l'on prend pour fraction continue celle qui vient d'être écrite. On trouve alors, en effet,

$$\begin{aligned}\pi = 3 &+ \frac{1}{7} - \frac{1}{7.113} - \frac{1}{113.33215} \\ &- \frac{1}{33215.99532} - \frac{1}{99532.364913} + \dots\end{aligned}$$