Tillot

Question d'examen sur les racines des équations

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 148-149

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__148_0>

QUESTION D'EXAMEN SUR LES RACINES DES ÉQUATIONS (*);

PAR M. TILLOT,
Professeur de mathématiques à Castres.

Théorème. $\varphi(x) = 0$ étant une équation algébrique de degré n et ayant n racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ inégales, on a

$$(1) \qquad \frac{1}{\varphi'(x_1)} + \frac{1}{\varphi'(x_2)} + \ldots + \frac{1}{\varphi'(x_n)} = 0.$$

Démonstration. On a l'identité connue

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} = \frac{1}{\varphi'(x_1)(x-x_1)}$$
$$+ \frac{1}{\varphi'(x_2)(x-x_2)} + \ldots + \frac{1}{\varphi'(x_n)(x-x_n)};$$

d'où

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x_1}{x}\right)(x-x_2)\ldots(x-x_n)} = \frac{1}{\varphi'(x_1)\left(1-\frac{x_1}{x}\right)}$$
$$+ \frac{1}{\varphi'(x_2)\left(1-\frac{x_2}{x}\right)} + \ldots + \frac{1}{\varphi'(x_n)\left(1-\frac{x_n}{x}\right)}.$$

Faisant $x = \infty$, on obtient la relation (1).

Vérification. Soit l'équation $x^3 + px + q = 0$; la relation indiquée devient

$$\frac{1}{3x_1^2+p} + \frac{1}{3x_2^2+p} + \frac{1}{3x_3^2+p} = 0,$$

ou, en ôtant le dénominateur commun,

$$3p^2 + 6p(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 9(x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2) = 0.$$

Or, par la théorie des fonctions symétriques, le coeffi-

(*) MM. Bertrand et Hermite examinateurs.

cient de $6p$ est $-2p$, le multiplicateur de 9 est p^2; donc la relation devient

$$3p^2 - 12p^2 + 9p^2 = 0.$$

Interprétation géométrique. Soit $y = f(x)$ l'équation d'une courbe parabolique de degré n, les axes étant rectangulaires. Si par les n points (réels ou imaginaires) où la courbe est rencontrée par l'axe des abscisses on mène les n tangentes (réelles ou imaginaires), la somme des cotangentes des angles que font ces n droites avec l'axe des x est nulle.

Nota. Ce théorème est un cas particulier du théorème d'Euler qui sert de fondement à la décomposition des fractions rationnelles (*voir* t. IV, p. 295, et t. VI, p. 127), théorème auquel l'illustre Jacobi a donné une si belle généralisation (t. VII, p. 114), et qui donne lieu à un théorème de géométrie que nous consignerons ailleurs.