E. FERIER

Solution de la question 203

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 142-144

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__142_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 203

(Voir t. VII, p. 441, et t. VIII, p. 45);

PAR M. E. FERIER,

Élève du lycée Charlemagne (classe de M. Catalan).

Dans un pentagone, si l'on considère comme sommets d'un pentagone :

1°. Les points milieux des cinq diagonales;

2°. Les centres de gravité des cinq triangles formés par deux diagonales et un côté, on obtient deux pentagones semblables et inversement placés.

Soit ABCDE (*fig.* 10, *Pl. II*) le pentagone donné.

On construit, d'après l'énoncé, le pentagone FGHIK, qui a pour sommets les milieux des diagonales AC, BD, CE, DA, EB.

Puis le pentagone F'G'H'I'K', qui a pour sommets les centres de gravité, c'est-à-dire les points de rencontre des médianes des triangles BED, ACE, ABD, BEC, ACD.

Il faut démontrer que ces deux pentagones sont semblables et inversement situés, c'est-à-dire que les droites qui joignent les sommets homologues se coupent en un même point, et que les sommets homologues sont de part et d'autre de ce point.

Il suffit de démontrer pour cela que les côtés F'G' et FG, G'H' et GH, etc., sont parallèles, et qu'on a, de plus, la suite des rapports égaux :

$$\frac{F'G'}{FG}=\frac{G'H'}{GH}=\frac{H'I'}{HI}=\frac{I'K'}{IK}=\frac{F'K'}{FK}.$$

La droite F'G' est parallèle à FG. En effet, pour obtenir le point F', on a pris le point de rencontre des médianes du triangle EBD, c'est-à-dire que le point F' se trouve sur la médiane EG, aux deux tiers à partir du sommet E. De même le point G' est sur la médiane EF dans le triangle EAC, aux deux tiers à partir du sommet E; par conséquent

$$\frac{EG'}{EF}=\frac{EF'}{EG};$$

donc la droite F'G' est parallèle à la base FG, et de plus on a

$$\frac{F'G'}{GF}=\frac{2}{3}.$$

On démontrerait de même que dans le triangle DKF, on a $F'K'$ parallèle à KF, et que, de plus,

$$\frac{F'K'}{FK} = \frac{2}{3},$$

et ainsi de suite pour les autres côtés. Donc ces deux pentagones ont leurs côtés parallèles et proportionnels ; donc ils sont semblables.

On voit, de plus, qu'ils sont inversement situés.