NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEBESGUE

Sur l'hexagramme mystique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 139-142

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__139_1>

SUR L'HEXAGRAMME MYSTIQUE

(Voir t III, p 304),

PAR M. LEBESGUE.

Cette proposition de Pascal ou de Desargues, suivant M. Gergonne, est bien nommée en ce sens qu'elle est en quelque sorte la figure, ou plutôt la représentation géométrique exacte de l'équation d'une conique qui passe par cinq points fixes. Cette proposition doit donc renfermer toute la théorie des sections coniques, puisque cette théorie n'est qu'un développement des propriétés de l'équation générale des courbes algébriques du second degré.

Avant de démontrer ce que j'avance ici, ce qui d'ailleurs l'a été en d'autres termes, je donnerai, d'après MM. Steiner et Plucker, l'énoncé complet des propriétés de l'hexagone mystique.

« Six points pris arbitrairement sur le périmètre d'une
» conique quelconque sont les sommets de soixante hexa-
» gones inscrits, et les points de contact de soixante hexa-
» gones circonscrits (CARNOT, *Géométrie de position*).
» lesquels jouissent des propriétés suivantes.

« 1°. Dans chacun des hexagones
» inscrits, les points de concours des
» directions des côtes opposés ap-
» partiennent tous les trois à une
» même droite (D) (Pascal), de
» sorte qu'on obtient ainsi soixante
» droites D.

» 2°. Ces soixante droites D con-
» courent trois a trois dans un
» même point p, de sorte qu'on ob-
» tient ainsi vingt points p.

» 3°. Ces vingt points p appartien-
» nent à quinze droites δ dont cha-
» cune en contient quatre, de sorte
» que par chacun des vingt points p,
» passent trois des quatre droi-
» tes δ. »

« 1°. Dans chacun des hexagones
» circonscrits, les droites qui joi-
» gnent les sommets opposés con-
» courent toujours par trois dans
» un même point (P) (Brianchon),
» de sorte qu'on obtient ainsi
» soixante points P.

» 2°. Ces soixante points P ap-
» partiennent trois à trois à une
» même droite d, de sorte qu'on
» obtient ainsi vingt droites d.

» 3°. Ces vingt droites δ concou-
» rent dans quinze points ϖ, par
» chacun desquels en passent qua-
» tre, de sorte que chacune des vingt
» droites d contient trois des quinze
» points ϖ. »

(Journal de M. Crelle, tome XXXIV, page 338.)

Il suffira de démontrer ici la proposition de Pascal, les autres serviront d'exercices. On peut d'ailleurs consulter les Mémoires de M. Plucker indiqués à l'endroit cité.

L'équation la plus générale des courbes du deuxième degré ou des coniques renferme six coefficients, dont un pourrait être réduit à l'unité; il suit de là qu'en se donnant cinq points de la conique, on aura cinq équations du premier degré pour déterminer les coefficients.

Dans le chapitre IV de son Introduction, Euler prend pour coordonnées des cinq points,

$$x = 0,\quad x = a,\quad x = 0,\quad x = c,\quad x = e,$$
$$y = 0,\quad y = 0,\quad y = b,\quad y = d,\quad y = f.$$

L'équation de la courbe cherchée

$$(\mathrm{A})\qquad Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

est entièrement déterminée en posant

$$\mathrm{B}\ \begin{cases} A = ce[f(a-c) - d(a-e)], & D = -bA, \\ B = cf(a-c)(b-f) - de(a-c)(b-d), & E = -ac, \\ C = df[c(b-f) - e(b-d)], & F = 0. \end{cases}$$

Il existe donc toujours une conique et une seule passant par les cinq points donnés (on suppose que trois points ne sont pas en ligne droite).

Si l'on met dans (A) les valeurs des coefficients (B), l'équation pourra prendre diverses formes, parmi lesquelles on distinguera la suivante :

$$(C) \qquad \begin{cases} X(y-f)(dx-cy)+Y(x-c)(ey-fx) \\ \qquad = (dx-cy)(ey-fx). \end{cases}$$

La comparaison donnerait les valeurs de X et Y, mais il est plus simple de les calculer directement ainsi qu'il suit : L'équation (C) du deuxième degré en x, y coordonnées d'un point variable de la courbe est évidemment satisfaite par $x=0$, $y=0$; $x=c$, $y=d$; $x=e$, $y=f$. Ainsi la conique (e) passe par (c) des cinq points; si on exprime qu'elle passe par les deux autres, en posant successivement $x=0$, $y=b$; $x=a$, $y=0$, on trouvera deux équations qui sont précisément celles des droites passant par les points $(0, 0)$, (c, d), $(0, b)$, (e, f). Pour fixer les idées, nous numéroterons ainsi qu'il suit les cinq points fixes et le point variable :

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ (0, 0), & (a, 0), & (c, d), & (x, y), & (e, f), & (0, b); \end{array}$$

l'hexagone sera 123456. On voit donc que X et Y sont les coordonnées du point de rencontre des côtés opposés (2, 3), (5, 6).

D'autre part, l'équation

$$(D) \qquad \frac{X}{P}+\frac{Y}{Q}=1$$

représente une droite coupant l'axe des x à une distance P de l'origine, et l'axe des y à une distance Q de la même origine. Or l'équation (C) prend la forme (D), si l'on pose

$$P = \frac{ey - fx}{y - f}, \quad Q = \frac{dx - cy}{x - c};$$

comme $y = 0$, $x = P$ sont les coordonnées de l'intersection des côtés opposés (1, 2), (4, 5), de même $x = 0$, $y = Q$ sont celles de l'intersection des côtés opposés (1, 6), (3, 4).

L'équation (C) ou l'équation (D) exprimera donc que les trois points d'intersection des côtés opposés sont en ligne droite. C'est là une des propriétés principales de l'hexagone mystique; c'est, comme l'on voit, l'interprétation géométrique de l'équation (C).

On aurait pu remplacer l'équation (C) par l'équation

$$\begin{aligned} X(y - d)(ey - fx) + Y(x - e)(dx - cy) \\ = (dx - cy)(fx - cy), \end{aligned}$$

et l'on aurait obtenu semblablement un théorème analogue qui donne, ainsi que le précédent, un moyen facile de construire par points et avec la règle, seulement les coniques qui passent par cinq points donnés.