NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

O. TERQUEM

Polyèdres réguliers ordinaires et polyèdres réguliers étoilés

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 132-139

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__132_0>

POLYÈDRES RÉGULIERS ORDINAIRES ET POLYÈDRES RÉGULIERS ÉTOILÉS

(Voir t VIII, p. 68),

D'APRÈS M. POINSOT.

11. Soit un polygone plan de n côtés et de l'espèce p; si par un point O pris hors du plan et par tous les côtés du polygone on mène n plans, on forme au point O un angle solide de n faces et de l'espèce p: une droite coupe donc les faces en $2(p-1)$ points. Si on conçoit une sphère ayant O pour centre, les faces de l'angle solide couperont la sphère suivant un polygone sphérique de n côtés et de l'espèce p. Dans ce qui suit, nous ne considérerons que des polygones sphériques réguliers de première espèce, et des angles solides réguliers de diverses espèces.

Le nombre des côtés d'un polygone régulier sphérique n'en détermine pas l'angle; soient donc n le nombre des côtés, a l'angle, et représentons par l'unité l'aire du triangle trirectangle.

L'aire de ce polygone est égale à $na - 2n + 4$; supposons que, f et g étant des nombres entiers positifs, f fois cette aire soit égale à g fois l'aire de la sphère, de sorte qu'on a

$$f(na - 2n + 4) = 8g;$$

il s'agit de savoir si l'on peut couvrir la sphère avec f de ces polygones réguliers égaux, de manière que les angles se réunissent en même nombre autour de chaque point, et y forment un angle solide régulier de même espèce: alors les cordes des côtés du polygone sphérique seront évidemment les arêtes d'un polyèdre régulier. On ne sait démontrer l'existence de cette possibilité que pour un petit nombre de cas, que nous allons examiner.

Soit $p - 1$ l'espèce de l'angle solide régulier, formé de q angles se réunissant en un point, on aura donc

$$qa = 4(p - 1);$$

ainsi il faut, avant tout, satisfaire aux deux équations

$$f(na - 2n + 4) = 8g, \quad qa = 4(p - 1).$$

f, n, g, q, p sont des nombres entiers positifs; n et q ne doivent pas être au-dessous de 3, et $p - 1$ doit être premier à q:

(A) $$g = 1, \quad p = 2.$$

1°. $n = 3$, $q = 3$, $a = \frac{4}{3}$, $f = 4$, tétraèdre régulier ordinaire.
2°. $n = 3$, $q = 4$, $a = 1$, $f = 8$, octaèdre régulier.
3°. $n = 3$, $q = 5$, $a = \frac{4}{5}$, $f = 20$, icosaèdre régulier.

Avec cette valeur de n, on ne peut faire q égal ou supérieur à 6.

4°. $n = 4$, $q = 3$, $a = \frac{4}{3}$, $f = 6$, hexaèdre régul. ou cube.

Avec cette valeur de n, on ne peut faire q égal ou supérieur à 4.

5°. $n = 5$, $q = 3$, $a = \frac{4}{3}$, $f = 12$, dodecaèdre régulier.

Avec cette valeur de n, on ne peut faire q égal ou supérieur à 4.

6°. $n = 6$.

Aucune valeur de q égal ou supérieur à 3 n'est admissible.

(B) $$p = 3.$$

Le pentagone est le premier polygone qui offre un polygone régulier de seconde espèce; faisons donc $q = 5$.

1°. $n = 3$, $a = \dfrac{8}{5}$, $f = \dfrac{20g}{7}$; d'où, en moindre nombre,

$$g = 7, f = 20.$$

Ainsi le polyèdre, s'il existe, a vingt faces triangulaires et recouvre sept fois la sphère. Or on peut en effet le construire à l'aide de l'icosaèdre ordinaire. De chaque sommet partent six diagonales; les cinq les plus courtes sont les arêtes égales d'un angle solide quintuple de la seconde espèce, et les douze angles solides fournissent 20 triangles équilatéraux également inclinés l'un sur l'autre : on aura ainsi un premier *icosaèdre étoilé.*

2°. $n=5$, $q=5$, $p=3$, $a=\frac{8}{5}$; d'où $f=4g$. g est au moins égal à 2; car, les angles solides étant de seconde espèce, la sphère doit être recouverte au moins deux fois.

Faisant donc $g=3$, $f=12$, ce solide existe et on le construit encore au moyen de l'icosaèdre ordinaire; de chaque sommet partent cinq arêtes dont les extrémités forment un pentagone régulier, les douze pentagones égaux forment un dodécaèdre étoilé.

12. Si dans le dodécaèdre étoilé précédent, qui recouvre trois fois la sphère, on prolonge de deux en deux les côtés des faces jusqu'à leur rencontre, on obtient douze pentagones réguliers de la seconde espèce, qui se réunissent par *trois* autour de vingt sommets, et forment un nouveau dodécaèdre étoilé, mais formé avec des pentagones de la seconde espèce; il a *vingt* angles solides triples, *trente* arêtes, et recouvre exactement quatre fois la sphère, de manière que sa surface ne peut être coupée par une droite en plus de huit points, et que l'angle solide est de *quatrième espèce.*

13. Si dans le dodécaèdre ordinaire on prolonge de même les côtés des douze pentagones, on obtient encore un nouveau dodécaèdre étoilé formé par des pentagones de la seconde espèce; mais les pentagones se réunissent par cinq autour de chaque sommet, et la surface du polyèdre ne recouvre que deux fois la sphère.

Observation. Les formules précédentes ne s'appliquent pas à ces deux solides, elles supposent des polygones de première espèce.

14. Ces quatre nouveaux polyèdres réguliers, une des plus belles découvertes de M. Poinsot et de la géométrie moderne, sont les seuls dont l'existence soit constatée. Existe-t-il encore d'autres polyèdres réguliers et dont le nombre de faces ne soit pas un de ceux-ci, 4, 6, 8, 12, 20? L'impossibilité est démontrée (Cauchy, *Journal de l'École Polytechnique,* 16e cahier, page 75, 1813) (*).

La difficulté de se représenter ces solides est sans doute cause de l'abandon de cette étude, qui aurait peut-être un intérêt même pour la physique. Est-il donc impossible que la nature ait employé des polyèdres étoilés dans la formation intégrante des cristaux? Qui répond que des phénomènes de réfraction ne se rattachent pas à cette organisation? En tous cas, il serait utile que ces nouveaux corps réguliers fussent construits et placés dans les cabinets d'histoire naturelle des colléges avec les autres polyèdres, pour aider aux démonstrations cristallographiques.

15. On sait que, sous le rapport analytique, la théorie des polygones réguliers étoilés est un cas particulier de la théorie des racines de l'unité, exprimées trigonométriquement. On en voit des exemples dans les beaux Mémoires de MM. Realis, Amiot et Lebesgue (t. II, p. 3 et 147; t. III, p. 264; t. V, p. 683). On est bien loin d'avoir quelque chose d'analogue pour les polyèdres réguliers étoilés: c'est que les divisions en parties égales de la circonférence sont illimitées, tandis que celles de la sphère sont limitées.

16. Les centres des faces des cinq polyèdres réguliers

(*) Nous verrons que les deux premiers polyèdres de M. Poinsot appartiennent à Kepler (*Harmonices Mundi*, lib. II, prop. XXVI).

ordinaires donnent : 1° pour le tétraèdre, un second tétraèdre régulier; 2° pour le cube, un octaèdre; 3° pour l'octaèdre, un cube; 4° dans le dodécaèdre, un icosaèdre; 5° dans l'icosaèdre, un dodécaèdre; de même dans les quatre polyèdres de M. Poinsot.

17. Les points milieux des arêtes dans les cinq corps réguliers donnent : 1° tétraèdre, un second tétraèdre; 2° cube, un corps semi-régulier construit sous huit triangles et six carrés, un des treize corps dits *archimédiques;* 3° octaèdre, le même corps archimédique que pour le cube; 4° dodécaèdre, autre corps archimédique construit sous douze pentagones et vingt triangles; 5° icosaèdre, même que le précédent.

18. *Note historique.* Nous renvoyons à l'*Aperçu historique* (page 476, 1837), où ce sujet est traité avec la sagacité et l'érudition particulières à ce célèbre géomètre. Boece (VI^e siècle) connaissait déjà le pentagone étoilé; il en parle avec une obscurité que M. Chasles parvient à dissiper. On a fait même, de ce pentagone, des usages sous le nom de *pentalpha* et *hexalpha*, des usages mystiques et *magiques ;* dès lors, comme on s'y attend bien, on attribue le tout à Pythagore, providence des antiquaires. Je dois ajouter que les cabalistes ont fait un emploi extravagant de l'hexagone étoilé (triangle double), sous le nom de *maguen David,* bouclier de David. La première *notion* scientifique de tous les polygones étoilés se trouve dans la Géométrie de Bravardin, publiée en 1496 ; il les nomme *figures à angles égrédients.* Enfin, en 1619, Képler publia son *Harmonices Mundi.* Le but de l'ouvrage est de découvrir des harmonies arithmétiques, géométriques et musicales dans les mouvements des corps célestes. A cet effet, il traite des polygones qu'on peut inscrire géométriquement, il mentionne le pentagone de deuxième espèce, l'octogone

et le décagone de troisième espèce, le pentédécagone de deuxième, quatrième et septième espèce, et l'étoile de vingt-quatre côtés de cinquième, septième et onzième espèce, et les désigne sous le nom de *stellæ,* étoiles; il ajoute que la *cos* (l'algèbre) donne bien les équations pour tous les polygones réguliers, mais pas la *solution.* Ainsi, d'après un certain algébriste, il rapporte cette équation,

$$7 - 14x^2 + 7x^4 - x^6 = 0\,;$$

et il fait la remarque d'une haute importance, que les racines sont les cordes des polygones *étoilés.* Selon son habitude, après être parvenu à des conceptions sublimes, en écoutant les inspirations de son génie, il tombe dans des excentricités en s'abandonnant à la folle de la maison, son imagination. C'est ainsi qu'il passe de cette doctrine des racines, si étonnante pour le temps, à la distinction entre divers degrés de *cognition,* et soutient que la cognition géométrique de l'heptagone ne saurait faire partie de l'omniscience divine: *Neque scitur a mente omniscia actu simplici æterno, quia suâ naturâ ex inscibilibus est.* On lit en marge qu'un mathématicien, homme d'expérience, avait engagé Képler à ôter cette phrase, qui peut avoir une apparence blasphématoire; à quoi il répond que les théologiens admettent que : *Impossibilia esse quæ contradictionem involvunt, et Dei scientiam ad talia impossibilia se non extendere.* D'où il conclut : *Quæ adulatio, propter imperitos librum non lecturos, defraudare cæteros;* c'est-à-dire qu'il ne faut pas dérober la vérité aux hommes instruits, par ménagement pour des ignares qui ne lisent pas. Cette observation trouve sa place même ailleurs que dans l'*Heptagonie.* Dans le second livre du même ouvrage, Képler décrit les treize corps archimédiques (*corpora archimedea*), et en donne les figures. Ce sont des solides terminés par divers polygones réguliers, et qui probablement sont ainsi nommés parce qu'Archimède a aussi considéré des solides terminés par deux surfaces coniques, par un cône et un cylindre, etc. A la manière dont Képler en parle, il ne paraît pas que ces corps soient de son invention : on n'en connaît pas l'auteur. Ils ont été souvent employés dans la perspective. L'ouvrage le plus curieux de ce genre est du XVI^e siècle; voici le titre, traduit de l'allemand: *Perspectiva corporum regularium*, c'est-à-dire *indication soignée pour mettre très-artistement en perspective les cinq corps réguliers dont parle Platon dans son* Timée, *et Euclide dans ses* Éléments, *etc.; d'après une voie particulière, neuve, prompte et exacte, qui n'a jamais été mise en pratique; de plus, une belle direction pour trouver et construire sans fin, au moyen de ces cinq corps, beaucoup d'autres corps de diverses espèces et formes, en l'honneur de tous les amateurs des arts libéraux*, par Wentzel Jamitzer (bourgeois et horloger à Nuremberg). Anno M. DLXVIII.

L'ouvrage, d'une magnifique exécution, contient plus d'une centaine de corps mis en perspective. La seconde partie, qui devait contenir les règles, n'a pas paru. L'auteur, né vers 1508 à Nuremberg, y est mort le 15 décembre 1586. On trouve une description détaillée de cet ouvrage, d'une extrême rareté, dans l'*Histoire des Mathématiques* de Kastner (tome II, page 19, 1797). Le même écrivain a donné, je crois, la première classification et la théorie de ce genre de corps dans les *Mémoires de la Société de Gottingue* (*De corporibus polyedris data lege irregularibus et commentationes*, tome VI, 1783; tome VIII, 1785, 86, 87 et 88). Une exposition trigonométrique complète de ces corps se lit dans la *Collection de Problèmes géométriques* de Meier Hirsch (t. II, p. 139, 1807); et, en français, on trouve quelques données et calculs sur ces corps, en 1808, dans l'ouvrage de Lidonne (voir *Nouvelles Annales,* tome I) ; mais les quatre nouveaux polyèdres réguliers sont mentionnés, pour la première fois, dans le célèbre Mémoire de M. Poinsot (*Journal de l'École Polytechnique,* 10e cahier, page 16, 1810). On ne saurait trop engager les élèves à lire cette remarquable production de l'ingénieux géomètre; quant aux professeurs, il n'en existe pas un seul qui ne l'ait lue plusieurs fois.

Nous nous occuperons du Mémoire de M. Cauchy, cité ci-dessus.