NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P.-G. EISENSTEIN

Résolution générale des équations des quatre premiers degrés

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 110-113

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__110_1>

RESOLUTION GÉNÉRALE DES ÉQUATIONS DES QUATRE PREMIERS DEGRÉS;

PAR M. P.-G. EISENSTEIN.

(Journal de M. Crelle, t. XXVI, p. 81.)

Traduit par M. LEBESGUE.

Dans la résolution des équations de degré élevé, on se contente à l'ordinaire, à ce qu'il semble, de démontrer leur possibilité, tandis qu'on se laisse détourner de la détermination effective du résultat final, par la prolixité du calcul; je donne ici le résultat final complétement développé pour les quatre premiers degrés. Je prends une équation tout à fait générale, sans ces restrictions que le coefficient du premier terme est l'unité, et que celui du second terme est nul, ce qui ne fait que nuire à l'élégance et à l'expression du vrai caractère du résultat final.

I. L'équation du premier degré $ax + b = 0$ donne

$$x = -\frac{b}{a}.$$

II. Pour la résolution des équations des deuxième, troisième et quatrième degrés, il faut introduire deux nouvelles fonctions $\varphi(\lambda)$, $\psi(\lambda)$ déterminées par les équations $\varphi^2(\lambda) = \lambda$, $\psi^3(\lambda) = \lambda$.

La fonction $\varphi(\lambda)$ a deux valeurs $\pm\varphi(\lambda)$ tandis que l'autre prend trois valeurs qui se déduisent d'une seule de la manière suivante :

$$\psi(\lambda), \quad \rho\psi(\lambda), \quad \rho^2\psi(\lambda),$$

où ρ représente l'expression $\frac{1}{2}[-1 + \sqrt{(-3)}]$.

Si l'on représente, pour abréger, par A, B, C, D, E, F les fonctions homogènes qui suivent :

$$A = b^2 - ac, \quad B = 3abc - a^2d - 2b^3,$$
$$C = a^2d^2 - 3b^2c^2 - 4ac^3 + 4db^3 - 6abcd,$$
$$D = ae + 3c^2 - 4bd, \quad E = ad^2 + b^2e - ace - 2bcd + c^3,$$
$$\begin{aligned} F = {} & 27a^2d^4 + 27b^4e^2 + 18a^2c^2e^2 - 36b^2c^2d^2 - 54a^2cd^2e \\ & - 54abc^2e^2 - 108abcd^3 - 108b^3cde + 6ab^2d^2e \\ & + 54ac^3d^2 + 54b^2c^3e + 180abc^2de - 81ac^4e - a^3e^3 \\ & + 64b^3d^3 + 12a^2bde^2, \end{aligned}$$

les racines de l'équation quadratique générale

$$ax^2 + 2bx + c = 0$$

seront

$$x = \frac{1}{a}[-b \pm \varphi(A)].$$

III. Pour l'équation cubique générale

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0,$$

on trouvera

$$x = \frac{1}{a}[-b + \psi(\alpha) + \psi(\beta)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b + \rho\psi(\alpha) + \rho^2\psi(\beta)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b + \rho^2\psi(\alpha) + \rho\psi(\beta)],$$

où

$$\alpha = \tfrac{1}{2}[B + a\varphi(C)], \quad \beta = \tfrac{1}{2}[B - a\varphi(C)];$$

et les valeurs correspondantes des deux fonctions $\psi(\alpha)$, $\psi(\beta)$ seront complétement déterminées par l'équation

$$\psi(\alpha) \, . \, \psi(\beta) = A = b^2 - ac.$$

IV. L'équation générale biquadratique

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

donne

$$x = \frac{1}{a}[-b + \varphi(\gamma) + \varphi(\delta) + \varphi(\varepsilon)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b + \varphi(\gamma) - \varphi(\delta) - \varphi(\varepsilon)],$$

$$x = \frac{1}{a}[-b - \varphi(\gamma) + \varphi(\delta) - \varphi(\varepsilon)],$$

$$x = \frac{1}{x}[-b - \varphi(\gamma) - \varphi(\delta) + \varphi(\varepsilon)],$$

où

$$\gamma = A + \tfrac{1}{2}a[\psi(\zeta) + \psi(\eta)],$$
$$\delta = A + \tfrac{1}{2}a[\psi(\zeta) + \rho^2\psi(\eta)],$$
$$\varepsilon = A + \tfrac{1}{2}a[\rho^2\psi(\zeta) + \rho\psi(\eta)],$$
$$\zeta = \frac{9E + \varphi(3F)}{9}, \qquad \eta = \frac{9E - \varphi(3F)}{9}.$$

Pour la détermination des valeurs correspondantes, on emploie les deux équations

$$\psi(\zeta) . \psi(\eta) = \tfrac{1}{3}D \quad \text{et} \quad \varphi(\gamma) . \varphi(\delta) . \varphi(\varepsilon) = \tfrac{1}{2}B.$$

Les racines de l'équation générale du cinquième degré prennent une forme toute semblable quand, outre les fonctions $\varphi(\lambda)$ et $\psi(\lambda)$, on introduit encore une nouvelle fonction $\chi(\lambda)$ déterminée par l'équation

$$\chi^5 + \chi = \lambda\ (^*).$$

Je reviendrai, dans une autre occasion, sur les propriétés remarquables et la formation des fonctions homogènes qui se présentent dans les formules pour la résolution des équations algébriques, et je montrerai leur usage dans la théorie des nombres.