Cubature d'un polyèdre à faces trapèzes. D'après M. C. Koppe, à Soest

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 108-110

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__108_1>

CUBATURE D'UN POLYÈDRE A FACES TRAPÈZES,

D'APRÈS M. C. KOPPE, à Soest.

(Crelle, t. XVIII, p. 275, 1838.)

I. *Lemme.* L'aire d'un polygone est la somme de termes dont chacun est le demi-produit de deux côtés du polygone par le sinus de l'angle qu'ils comprennent (*voir* tome VII, page 348).

II. Théorème. *Un corps ayant pour bases deux polygones parallèles, et pour faces des trapèzes, est équivalent à un prisme ayant pour hauteur la distance des deux polygones, et pour base l'aire de la section parallèle faite à égale distance des deux bases, augmentée de la douzième partie de l'aire d'un polygone qui a les mêmes angles que les polygones, et qui a pour côtés les différences de leurs côtés homologues.*

Démonstration. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les côtés successifs du polygone supérieur, et $b_1, b_2, \ldots, b_k$ les côtés correspondants de la base inférieure: a_1 et b_1, a_2 et b_2, etc., sont parallèles. Soit h l'intervalle des bases. Désignons par $(a_p a_q)$ l'angle de deux côtés a_p, a_q; on a $(a_p a_q) = (b_p b_q)$. A une distance x de la base supérieure, faisons une section parallèle aux bases, et soient $z_1, z_2, \ldots, z_4$ les côtés correspondants à $a_1, a_2, \ldots, a_4$; on aura

$$(z_p z_q) = (a_p a_q)$$

et

$$z_p = a_p - (a_p - b_p)\frac{x}{h}, \quad z_q = a_q - (a_q - b_q)\frac{x}{h}.$$

A, B désignant les aires respectives des bases, et Z l'aire de la section, on a, d'après le lemme,

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \tfrac{1}{2}\Sigma_4^1 a_p a_q \sin(a_p a_q), \\ \mathrm{B} &= \tfrac{1}{2}\Sigma_4^1 b_p b_q \sin(a_p a_q), \\ \mathrm{Z} &= \tfrac{1}{2}\Sigma_4^1 z_p z_q \sin(a_p a_q), \end{aligned}$$

ou mettant les valeurs de $z_p z_q$, il vient

$$\mathrm{Z} = \tfrac{1}{2}\Sigma\left[\begin{array}{c} a_p a_q - (2a_p a_q - a_p b_q - a_q b_p)\dfrac{x}{h} \\ + (a_p - b_p)(a_q - b_q)\dfrac{x^2}{h^2} \end{array}\right]\sin a_p a_q.$$

V désignant le volume des corps, on a

$$\mathrm{V} = \int_0^h \mathrm{Z}\,dx = \tfrac{1}{12} h\Sigma(2a_p a_q + a_p b_q + 2b_p b_q)\sin a_p a_q.$$

Soit V′ le volume du prisme qui a pour hauteur h et pour base la section parallèle passant par le milieu de h; on a

$$\begin{aligned} \mathrm{V}' &= \tfrac{1}{8} h\Sigma(a_p + a_q)(b_p + b_q)\sin a_p a_q, \\ \mathrm{V} - \mathrm{V}' &= \tfrac{1}{24} h\Sigma(a_p - b_p)(a_q - b_q)\sin a_p a_q; \end{aligned}$$

or cette différence est la douzième partie d'un prisme ayant pour hauteur h et pour base un polygone équiangle aux bases, et dont les côtés sont $a - b$, $a_p - b_p$ et $a_q - b_q$. C. Q. F. D.

COROLLAIRES. 1°. *Cône tronqué à bases circulaires.* Soient h la hauteur d'un cône tronqué, r et ρ les rayons des bases; on aura

$$V = \pi h \left[\left(\frac{r+\rho}{2} \right)^2 + \tfrac{1}{12} (\rho - r)^2 \right].$$

2°. *Cône tronqué elliptique.* Soient h la hauteur, a_1, a_2 les demi-axes principaux d'une base, b_1, b_2 les demi-axes principaux de l'autre base; on aura

$$V = \pi h \left[\frac{a_1 + b_1}{2} \cdot \frac{a_2 + b_2}{2} + \tfrac{1}{12} (a_1 - b_1)(a_2 - b_2) \right].$$

3°. *Hexaèdre trapézoïde.* Les bases étant aussi des trapèzes, soient a_1, a_2 les côtés parallèles d'une base et c leur distance, b_1, b_2 les côtés parallèles de l'autre base et d l'intervalle; on aura

$$V = h \left[\frac{a_1 + b_1 + a_2 + b_2}{2} \cdot \frac{c+d}{2} + \tfrac{1}{12} (a_1 - b_1 + a_2 - b_2) \frac{c-d}{2} \right].$$