TERQUEM

Trigonométrie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 8 (1849), p. 100

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1849_1_8__100_0>

TRIGONOMÉTRIE.

THÉORÈME I. Dans un triangle rectiligne ABC, on a la relation

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C$$
$$+ 2 \sin A \sin C \cos B + 2 \sin B \sin C \cos A.$$

Démonstration. Circonscrivons une circonférence au triangle : on a

$$a = 2R \sin A, \quad b = 2R \sin B, \quad c = 2R \sin C;$$

a, b, c sont les côtés et R le rayon. Or

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cos A;$$

donc

$$\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2 \sin B \sin C \cos A.$$

On a deux autres équations analogues ; les ajoutant, on trouve la relation énoncée.

THÉORÈME II. Soit un triangle sphérique ABC ; a, b, c les côtés, et A′, B′, C′ les angles du triangle rectiligne formé par les cordes ; on a la relation

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} c + \sin^2 \tfrac{1}{2} b + \sin^2 \tfrac{1}{2} c = 2 \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} b \cos C'$$
$$+ 2 \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} c \cos B' + 2 \sin \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} c \cos A'.$$

Démonstration. Les trois cordes formant le triangle rectiligne sont égales à

$$2 \sin \tfrac{1}{2} a, \quad 2 \sin \tfrac{1}{2} b, \quad 2 \sin \tfrac{1}{2} c,$$

et l'on a dans ce triangle

$$4 \sin^2 \tfrac{1}{2} a = 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} b + 4 \sin^2 \tfrac{1}{2} c - 8 \sin \tfrac{1}{2} b \sin \tfrac{1}{2} c \cos A'.$$

On a deux autres équations analogues ; ajoutant à celle-ci, on trouve la relation indiquée.