NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SERRET

Solution de la question 170

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 99-101

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__99_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 170 (t. VI, p. 451).

PAR M. PAUL SERRET.

---

abc, ABC étant deux triangles rectilignes situés dans le même plan, les quatre sommets b, c, B, C étant fixes, on donne la relation

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = \text{constante} = \frac{1}{m}.$$

Si le sommet a décrit une ligne plane algébrique divisée par la droite bc en deux parties égales et symétriques, le sommet A décrira une ligne du même degré, divisée en deux parties égales et symétriques par la droite BC (Jacobi).

Démonstration. Sans changer la nature du lieu décrit par le sommet A, nous pourrons évidemment transporter le côté BC sur le côté bc, de manière que leurs directions coïncident, et que leurs milieux se trouvent au même point o que nous prendrons pour origine des coordonnées rectangulaires, bc étant l'axe des x.

Soient $ob=oc=a$; $oB=oC=\alpha$; x,y les coordonnées du point a; x', y' les coordonnées du point correspondant A. D'après l'énoncé de la question l'équation du lieu des points a sera de la forme

$$\varphi(x, y^2)=0, \qquad (1)$$

c'est-à-dire qu'elle ne contiendra que des puissances paires de y.

Or on a :

$$\overline{ab}^2=(x-a)^2+y^2; \quad \overline{ac}^2=(x+a)^2+y^2$$
$$\overline{AB}^2=(x'-\alpha)^2+y'^2; \quad \overline{AC}^2=(x'+\alpha)^2+y'^2.$$

On aura donc, d'après l'énoncé de la question, les deux égalités suivantes :

$$(2) \qquad (x'-\alpha)^2+y'^2 = m^2(x-a)^2+m^2y^2;$$
$$(3) \qquad (x'+\alpha)^2+y'^2 = m^2(x+a)^2+m^2y^2.$$

Retranchant (3) de (2) membre à membre, l'on trouve $4\alpha x'=4am^2.x$, d'où

$$(a) \qquad x=nx', \text{ en posant } n=\frac{\alpha}{m^2a}.$$

Remplaçant x par nx' dans (2), on en tire :

$$y^2=\frac{(x'-a)^2-m^2(nx'-a)^2+y'^2}{m^2},$$

ou bien

$$(b) \qquad y^2=Ly'^2+Mx'^2+Nx'+P.$$

Portant ces valeurs de x et y^2 dans l'équation (1), nous aurons :

$$\varphi(nx'^2Ly'^2+Mx'^2+Nx'+P)=0 \qquad (4)$$

pour l'équation du lieu du sommet A ; on voit que cette équation est du même degré que l'équation du lieu du point a, et que, comme celle-ci, elle ne contient que des puissances paires de l'ordonnée y'^2, ce qui montre que le lieu des sommets A est divisé par la droite BC en deux parties égales.