NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

BRETON DE CHAMP

Réduction d'un postulatum de M. Catalan au postulatum d'Euclide

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 93-97

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__93_1>

RÉDUCTION

d'un postulatum de M. Catalan au postulatum d'Euclide.

PAR M. BRETON (DE CHAMP),
Ingénieur des ponts et chaussées.

Deux droites indéfinies étant situées dans un même plan, si la première a deux points situés de côté et d'autre de la seconde, elle rencontre celle-ci.

« Cette proposition, » dit M. Catalan dans la préface de son Traité de géométrie, « est aussi importante que le fameux » postulatum d'Euclide ; cependant on l'admet sans scrupule,

» et l'on fait bien, attendu qu'en géométrie, comme en toute » autre branche des connaissances humaines, il existe un » petit nombre de propositions dont la vérité ne paraît pas » contestable, et qui néanmoins ne peuvent être démontrées » d'une manière rigoureuse. »

Je crois que l'opinion exprimée par M. Catalan offre quelque danger; il serait assurément très-regrettable que l'on étendît sans une absolue nécessité le nombre des vérités non susceptibles d'être démontrées. C'est ce que les anciens avaient parfaitement compris; aussi en ont-ils resserré le cercle le plus qu'il leur a été possible, et les barrières qui les ont arrêtés sont les mêmes qui nous arrêtent encore. L'admiration que les éléments d'Euclide ont excitée et exciteront toujours, vient peut-être moins de l'enchainement des propositions que du petit nombre de principes d'une évidence incontestée qui servent de fondement à cet impérissable édifice.

On trouverait difficilement, il est peut-être impossible de formuler aujourd'hui une proposition qui ne puisse être démontrée avec le seul secours des principes et des axiomes sur lesquels repose la géométrie ancienne. Je vais faire voir que l'énoncé de M. Catalan est dans ce cas.

A et B (le lecteur est prié de vouloir bien faire la figure) étant deux points situés de part et d'autre de la droite L, il s'agit de démontrer que la droite AB rencontre nécessairement L. On voit bien qu'en faisant tourner autour de A une droite indéfinie, elle rencontrera nécessairement le point B dans quelqu'une de ses positions. Comment démontrer qu'alors elle rencontre la droite L? C'est là toute la difficulté.

Il est bien clair que si l'on pouvait déterminer deux points P, Q sur cette droite, tels que B se trouvât dans l'angle formé par les droites AP, AQ, cette difficulté serait levée, parce que la droite mobile, en allant de la position AP à la position AQ, ne cesserait pas de rencontrer PQ ou L, et passerait par B dans une position intermédiaire. La question se réduit ainsi à déterminer deux points P, Q tels que l'angle PAQ contienne le point B. Cette recherche dépend des deux lemmes suivants.

1er Lemme. *Dans le triangle isocèle les angles adjacents à la base sont aigus.*

On sait que ces angles sont égaux entre eux, et que la médiane qui aboutit au milieu de la base est perpendiculaire à cette dernière. Si les angles dont il s'agit étaient obtus, les prolongements des côtés formeraient avec la même base des angles aigus du côté de la médiane prolongée, et, en vertu du postulatum d'Euclide, iraient rencontrer cette médiane en un même point. On pourrait donc aller de ce point au sommet par trois lignes droites différentes, la médiane et les deux côtés, c'est-à-dire qu'il y aurait entre deux points plusieurs lignes droites distinctes, contrairement à un axiome connu.

Ces angles ne peuvent pas être droits, car en prolongeant la médiane d'une longueur égale à elle-même, et joignant le point ainsi obtenu aux extrémités de la base, on aurait un nouveau triangle égal au triangle proposé, et les côtés de l'un, à cause de l'hypothèse admise, seraient les prolongements des côtés de l'autre. On retomberait ainsi sur le cas précédent de trois lignes droites distinctes tirées entre deux points.

Donc les angles à la base du triangle isocèle ne sauraient être obtus, ni droits; donc ils sont nécessairement aigus. C. Q. F. D.

Corollaire. *Dans le triangle rectangle, les angles adjacents à l'hypoténuse sont aigus.*

Car le triangle rectangle peut toujours être regardé comme la moitié d'un triangle isocèle ayant pour base le double de l'un des côtés de l'angle droit, et pour médiane l'autre côté, et cela de deux manières différentes.

2e Lemme. *D'un point pris hors d'une droite, on peut toujours abaisser une perpendiculaire sur cette droite.*

On reconnaît sans peine que la démonstration de cette proposition est présentée par les auteurs de manière à supposer l'admission du *postulatum* de M. Catalan, il faut donc la changer ici.

A étant le point donné hors de la droite et P un point de celle-ci pris à volonté, joignez AP. Si les deux angles formés au point P de part et d'autre de PA ne sont pas droits, portez du côté de la droite où est l'angle aigu PQ = PA, et tirez AQ; le triangle PAQ sera isocèle. Faites tourner ce triangle autour de PQ de manière à le placer en PBQ, je dis que le point B tombera dans l'angle PAQ. Car les angles PQA, APQ sont aigus, le premier d'après le lemme précédent, le second par construction; les angles APB, AQB, égaux respectivement à 2APQ, 2AQP, sont l'un et l'autre moindres que deux angles droits. D'où il résulte que PB, QB sont, par rapport aux côtés AP, AQ et à leurs prolongements du même côté que PQ. Donc le point B est dans l'angle PAQ.

Cela posé, si une droite indéfinie se meut autour du sommet A de cet angle, et va de la position AP à la position AQ, elle rencontrera nécessairement le point B dans une certaine position intermédiaire; et comme cette droite traversera toujours PQ pour sortir du triangle APQ, il s'ensuit que la droite AB rencontrera nécessairement PQ.

On démontrerait, comme à l'ordinaire, que AB est perpendiculaire sur PQ, etc. Donc on peut toujours d'un point pris hors d'une droite abaisser une perpendiculaire sur cette droite. C. Q. F. D.

Abordons maintenant la proposition qui forme l'objet de cet article.

THÉORÈME : *Deux droites indéfinies étant situées dans un même plan, si la première a deux points situés de côté et d'autre de la seconde, elle rencontre celle-ci.*

En effet, des points A, B donnés sur la première droite de part et d'autre de la seconde L, j'abaisse sur celle-ci les perpendiculaires AP, BQ. Si les pieds P, Q de ces perpendiculaires ne coïncident pas, je tire MQ, BP. On aperçoit de suite que le point B est dans l'angle PAQ, car chacun des angles APB, AQB, composé d'un angle droit et d'un angle aigu (cor. lemme 1er) est moindre que deux droits. Donc la droite AB coupe nécessairement PQ. C. Q. F. D.

Note. Une ligne plane *infinie* partage le plan en deux régions *infinies*, dont la ligne forme la frontière, est la limite commune. Deux points sont dits situés de *côté et d'autre* de cette limite, lorsque pour aller d'un point à l'autre sur un chemin continu, il faut traverser cette limite. Si l'on veut se rendre compte des mots que l'on prononce, on ne peut attacher un autre sens à cette locution, *de côté et d'autre*. S'il en est ainsi, je ne comprends pas la nécessité et même les sujets de ces divers théorèmes. Que dirait-on de la proposition suivante? Deux endroits sont situés de côté et d'autre de l'Océan, démontrer que pour aller de l'un à l'autre, il faut traverser l'Océan? Il y a encore d'autres propositions de ce genre auxquelles je ne comprends rien. Ainsi des géomètres démontrent sérieusement que pour aller d'un point situé dans *l'intérieur* d'une circonférence à un autre point situé à *l'extérieur*, il faut traverser la *circonférence*. Que signifient donc ces mots *intérieur* et *extérieur* d'une enceinte, sinon qu'il faut percer l'enceinte pour venir de l'un à l'autre? En mathématique il n'est pas excessivement rare de voir *démontrer* des *définitions*; c'est chose ordinaire en philosophie.