A. HAILLECOURT

Sur l'emploi des signes +, - en géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 83-86
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__83_1>

SUR L'EMPLOI DES SIGNES +, — EN GÉOMÉTRIE.

PAR M. A. HAILLECOURT.
professeur au lycée de Rouen.

MM. Briot et Bouquet, dans leur Géométrie analytique, (pages 153, 164) donnent cette nouvelle forme aux énoncés de deux théorèmes connus et de leurs réciproques :

I. Si sur les trois côtés d'un triangle, on prend trois points tels, que le produit de trois segments non consécutifs soit égal au produit des trois autres, les trois droites qui joignent ces *points aux sommets opposés passent par un même point; et réciproquement.*

II. Si sur les trois côtés d'un triangle on prend trois points tels que le produit de trois segments non consécutifs soit égal et de signe contraire au produit des trois autres, ces trois points sont en ligne droite, et réciproquement.

C'est admettre implicitement que sur une droite limitée, tout segment compté à partir d'une extrémité en marchant vers l'autre est pris positivement; que tout segment compté en sens contraire est pris négativement. C'est d'ailleurs la règle que leurs auteurs appliquent à la proportion harmonique, au rapport enharmonique, etc.

Ces nouveaux énoncés, qui comprennent évidemment les anciens, seront certainement utiles, de quelque manière que se présente le système de trois points pris sur les côtés d'un triangle, soit comme élément dans le courant d'une démonstration, soit comme conclusion. Ces deux cas s'offrent simultanément dans l'exemple suivant relatif à l'hexagramme de Pascal. J'y ai été conduit en examinant, dans le cercle seulement, le cas d'un hexagone de forme quelconque inscrit. Je considérerai cependant une conique quelconque, en remarquant que, si la démonstration du théorème de Carnot nécessite pour les coniques l'emploi des coordonnées, elle ne va pas au delà de la plus simple géométrie pour le cercle.

1. Le théorème de Carnot peut s'énoncer ainsi :

Un polygone de n *côtés étant tracé sur le plan d'une courbe du* m^ième^ *degré, et chaque côté coupant la courbe en* m *points; les produits* P, P′ *des segments comptés à partir des sommets jusqu'aux points de rencontre, en parcourant le polygone d'abord dans un sens, puis en sens contraire, sont égaux. Ils sont de même signe ou de signes contraires, suivant que le produit* mn *est pair ou impair.* $P' = (-1)^{mn}P$.

Pour le cas du cercle et d'un triangle on aura $P' = P$. La géométrie le prouve complétement.

II. Comme cas particulier en géométrie analytique ; comme généralisation du théorème de Ptolémée en géométrie élémentaire, on trouve :

Un polygone de n *côtés étant coupé par* m *droites, les produits* P, P' *des segments comptés à partir des sommets jusqu'aux points d'intersection en parcourant le polygone d'abord dans un sens puis en sens contraire, sont égaux. Ils ont le même signe ou des signes contraires, suivant que* mn *est pair ou impair.*

$$P' = (-1)^{mn} P.$$

Pour un triangle coupé par trois transversales, on a $P' = -P$.

Soit maintenant un hexagone quelconque H inscrit dans une conique (*).

Soit ABC le triangle obtenu en prolongeant jusqu'à leurs rencontres trois côtés non consécutifs (1), (3), (5). Ils sont coupés en neuf points : α, α', α'' sur BD ; β, β', β'' sur AC ; δ, δ', δ'' sur AB par les trois autres cotés (2), (4), (6). — Sur ces neuf points, six, par exemple α, α', β, β', δ, δ', sont les sommets de l'hexagone ou les points d'intersection de la conique et du triangle ; les trois autres points α'', β'', δ'', où se coupent respectivement (1) et (4), (2) et (5), (3) et (6), sont ceux qu'il faut prouver être en ligne droite.

Or, en vertu des principes précédents, on a :

$$A\delta.\ A\delta'.\ B\alpha.\ B\alpha'.\ C\beta.\ C\beta' = A\beta.\ A\beta'.\ B\delta.\ B\delta'.\ C\alpha.\ C\alpha'.$$

$A\delta.\ A\delta'.\ A\delta''.\ B\alpha.\ B\alpha'.\ B\alpha''.\ C\beta.\ C\beta'.\ C\beta'' = -\ A\beta.\ A\beta'.\ A\beta''.$ $B\delta.\ B\delta'.\ B\delta''.\ C\alpha.\ C\alpha'.\ C\alpha''$; d'où divisant,

$$A\delta''.\ B\alpha''.\ C\beta'' = -\ A\beta''.\ B\delta''.\ C\alpha''.$$

(*) Le lecteur est prie de faire la figure.

Ce qui ne laisse plus aucun doute sur la position des trois points α'', β'', γ''.

Si maintenant on examine attentivement les démonstrations données dans les livres les plus estimés, même dans la géométrie de position, on se convaincra que, hors le cas d'un hexagone convexe, il n'est pas évident que les trois points soient en ligne droite plutôt que sur trois droites concourant aux sommets du triangle employé plus haut et désigné par ABC.