Grand concours (1847). Mathématiques élémentaires

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 81-83

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__81_0>

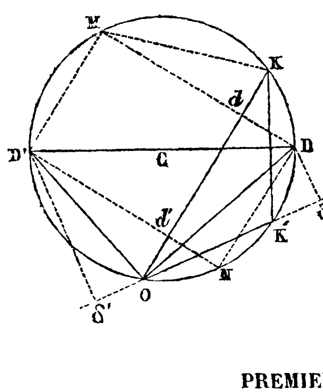
GRAND CONCOURS (1847).

Mathématiques élémentaires.

Soient donnés dans un cercle une corde KK′ et un diamètre DD′ perpendiculaire à cette corde.

D'un point O de la circonférence on mène deux lignes aux extrémités du diamètre et deux lignes aux extrémités de la corde.

Il s'agit de prouver que la somme des projections des deux premières lignes sur l'une OK des deux autres, est égale à cette même ligne OK, et que la différence de ces mêmes projections est égale à l'autre ligne OK′, c'est-à-dire que d et d' étant les pieds des perpendiculaires abaissées des extrémités du diamètre sur la droite OK, on a



1° $Od + Od' = OK$,

2° $Od - Od' = OK'$.

PREMIER PRIX.

PAR M. SAREIL (RICHARD),

Né le 15 juillet 1829, à Thérapia, près Constantinople (Turquie d'Europe), élève interne du lycée Descartes, classe de M. Lionnet.

—

Prolongeons les droites Dd, D′d' jusqu'à la rencontre de la circonférence aux points M, N, et menons les cordes MK, MD′, ND. Les droites MD, ND′ étant parallèles comme perpendiculaires à une même droite OK et les angles DMD′, DND étant droits comme inscrits dans des demi-cercles, la figure DMD′N est un rectangle, et les cordes MD′, ND sont égales et parallèles entre elles, et égales et parallèles à dd'; donc on a :

$$(1)\ \text{arcKM} = \text{arcOD}'$$

et

$$(2)\ \text{arcDK} = \text{arcDK}' = \text{arcON}.$$

Cela posé, 1° pour établir la relation $Od + Od' = OK$, comme on a $OK = Od + dK$, il suffit de démontrer que $Od' = dK$.

Les triangles rectangles KMd, $OD'd'$ ont les hypoténuses KM et OD′ égales, comme sous-tendant des arcs égaux (1); de plus, les côtés Md, $D'd'$ sont égaux comme opposés dans un rectangle; donc le troisième côté dK du premier est égal au troisième côté Od' du second.

Remarque. Cette démonstration ne supposant pas que le diamètre DD′ soit perpendiculaire à la corde KK′, la première partie du théorème est vraie, quelle que soit la situation relative de ces deux droites.

2° On a $Od - Od' = dd' = DN$; donc, pour établir l'égalité $Od - Od' = OK'$, il suffit de démontrer qu'on a $DN = OK'$.

Or, $\text{arcDK}' = \text{arcON}$ (2); ajoutant de part et d'autre un même arc NK′, il vient :

$$\text{arc DK}'\text{N} = \text{arc ONK}';$$

donc $DN = OK'$.

Remarque I. Soient $O\delta$, $O\delta'$, les projections des droites OD, OD′ sur la direction de la corde OK′. Les triangles rectangles ODd, $OD\delta$ ont l'hypoténuse OD commune et les angles aigus DOd, $DO\delta$ égaux entre eux comme inscrits dans des segments égaux; donc le côté $Od = O\delta$. On prouverait de même que $Od' = O\delta'$; donc

$$O\delta + O\delta' = Od + Od' = OK,$$
$$O\delta - O\delta' = Od - Od' = OK'.$$

Ces égalités montrent que le théorème n'est plus vrai dans le sens direct de son énoncé, lorsque la corde OK', sur la direction de laquelle on projette les droites OD, OD', est située tout entière d'un même côté du diamètre DD'; car alors la somme des projections Oδ, Oδ', au lieu de leur différence, est égale à l'autre corde OK, tandis que la différence de ces mêmes projections, au lieu de leur somme, est égale à la corde OK'. Mais l'énoncé s'applique à tous les cas, si l'on regarde comme positive toute projection, telle que Od ou Od' dont la seconde extrémité est située du même côté du point O que l'autre extrémité K de la corde OK à laquelle elle se rapporte; et, comme négative, toute projection, telle que Oδ', dont la seconde extrémité est située de l'autre côté du point O par rapport à l'autre extrémité K' de la corde OK'.

Remarque II. Les mêmes constructions et les mêmes raisonnements étant applicables à une position quelconque du point O aussi rapprochée qu'on voudra de l'un des points D, D', K, K', le théorème est encore vrai lorsqu'à la limite il coïncide avec un de ces quatre points; ce qui d'ailleurs se vérifie immédiatement.