Nouvelles annales de mathématiques

A.-J.-H. Vincent

Note sur la théorie du parallélogramme de Watt

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 64-68

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__64_1>

NOTE

sur la théorie du parallélogramme de Watt.

PAR M. A.-J.-H. VINCENT.

—

Dans les mémoires de la Société royale des sciences, de l'agriculture et des arts, de Lille, pour 1836 et 1837, p. 5 et suiv., j'ai donné et discuté l'équation de la *courbe à longue inflexion*, sorte de *lemniscoïde* du sixième degré, qui jouit de cette curieuse et importante propriété, que la tête du piston des *machines à vapeur*, tout en en décrivant un arc d'une notable étendue, peut être néanmoins considérée comme suivant une direction à peu près rectiligne, quand on règle son mouvement au moyen de cet ingénieux appareil auquel on a donné le nom de *parallélogramme de Watt*.

(*Fig.* 17.) Je rappellerai, d'après Hachette, que la question revient à déterminer le lieu géométrique d'un point M situé sur une droite dont un segment constant, PQ, est assujetti à glisser entre deux circonférences ayant respectivement les points A et B pour centres, et pour rayons AQ et BP. Alors, en prenant pour origine des coordonnées rectangulaires un point quelconque O de la droite AB prise elle-même pour base des x, puis faisant :

$$OA = a;\quad OB = b;\quad AB = a + b = c;$$
$$BP = p;\quad AQ = q;$$
$$PM = r;\quad QM = s;\quad PQ = s - r = d;$$

et enfin, nommant x et y les coordonnées du point M, x' et y' celles du point P, x'' et y'' celles du point Q, on a, comme dans le mémoire cité, ces *six* équations :

$$(x' - b)^2 + y'^2 = p^2, \tag{1}$$
$$(x'' + a)^2 + y''^2 = q^2, \tag{2}$$
$$(x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 = d^2, \tag{3}$$
$$y(x' - x'') - x(y' - y'') = x'y'' - y'x'', \tag{4}$$
$$(y - y')^2 + (x - x')^2 = r^2, \tag{5}$$
$$(y - y'')^2 + (x - x'')^2 = s^2, \tag{6}$$

dont une, l'équation (3), n'est qu'une conséquence des trois suivantes, ce qui laisse ainsi le nombre d'équations justement nécessaire pour permettre l'élimination des *quatre* quantités variables x', y', x'', y''.

Cela posé, je dirai que ce qui m'engage à revenir ici sur ce sujet, c'est la possibilité, d'abord inaperçue, de simplifier de beaucoup la méthode employée pour faire cette élimination, et surtout de conserver au calcul une utile symétrie, avantage dont on est privé quand on place l'origine à l'un des points A et B, comme je l'avais fait dans mon premier essai.

Cette simplification résulte d'une forme plus élégante dont est susceptible l'équation (4), c'est-à-dire l'équation de la droite qui passe par les deux points donnés (x', y'), (x'', y''). En effet, on peut mettre une pareille équation sous l'une de ces deux formes :

$$\left.\begin{aligned} x(y'-y'')+x'(y''-y)+x''(y-y')=0\,,\\ y(x'-x'')+y'(x''-x)+y''(x-x')=0\,,\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

qui expriment chacune une relation, soit entre les abscisses de trois points quelconques de la droite et les différences de leurs ordonnées prises deux à deux, soit entre les ordonnées des trois points et les différences de leurs abscisses.

D'un autre côté, comme ces différences d'ordonnées et d'abscisses ne sont autre chose que les projections sur les axes, des distances des trois points eux-mêmes pris deux à deux, distances qui sont ici représentées, savoir :

par r pour $(y-y')$ et $(x-x')$,
par s pour $(y-y'')$ et $(x-x'')$,
et enfin par d pour $(y'-y'')$ et $(x'-x'')$,

il s'ensuit que les équations (A) peuvent se traduire dans les suivantes :

$$\left.\begin{aligned} dx-sx'+rx''=0\,,\\ dy-sy'+ry''=0.\end{aligned}\right\}\quad (B)$$

Maintenant l'équation (1) combinée avec l'équation (5) d'une part, et semblablement l'équation (2) avec l'équation (6), nous donnent :

$$\left.\begin{aligned} y^2+x^2-2(yy'+xx')+2bx'-b^2+p^2-r^2=0\,,\\ \text{et}\quad y^2+x^2-2(yy''+xx'')-2ax''-a^2+q^2-s^2=0.\end{aligned}\right\}\quad (C)$$

Prenons dans (B) les valeurs de x'' et y'', savoir :

$$x'' = \frac{sx' - dx}{r} \quad \text{et} \quad y'' = \frac{sy' - dy}{r}; \qquad \text{(D)}$$

et substituons-les dans la seconde des équations (C); nous en déduisons, après avoir multiplié par r et simplifié,

$$r(y^2 + x^2) + 2y(dy - sy') + 2(x + a)(dx - sx') - \\ - r(d^2 - q^2 + s^2) = 0. \qquad \text{(E)}$$

D'un autre côté, la première équation du même système (C), multipliée par s, devient :

$$s(y^2 + x^2) - 2s(yy' + xx') + 2bsx' - s(b^2 - p^2 + r^2) = 0. \quad \text{(F)}$$

Alors, en retranchant (F) de (E) et réduisant, on obtient :

$$d(y^2 + x^2) + 2adx + b^2s - a^2r - k^3 = 2csx', \quad \text{(G)}$$

en faisant pour simplifier, comme dans l'équation 19 du mémoire cité (11 du tirage à part in-4°) :

$$p^2s - q^2r + drs = k^3.$$

De là on peut tirer, d'abord :

$$x' = \frac{d(y^2 + x^2) + 2adx + b^2s - a^2r - k^3}{2cs}; \quad \text{(H)}$$

puis ensuite, par la substitution dans (G),

$$y' = \frac{cs(x^2 + y^2 + p^2 - b^2 - r^2) - (x - b)[d(x^2 + y^2) + 2adx + b^2s - a^2r - k^3]}{2csy}$$

Il ne reste plus alors, après avoir tiré de x',

$$(x' - b) = \frac{d(y^2 + x^2) + 2adx + a^2d - c^2s - k^3}{2cs}, \quad \text{(J)}$$

qu'à substituer cette expression et celle de y', dans l'équation (1), ce qui donne pour résultat une équation qui ne diffère pas de la formule numérotée 26 dans le premier tableau du mémoire cité (ou de la première équation de la page 6 du tirage à part), dès qu'on a substitué, dans cette dernière, $(x + a)$ au lieu de x, ou $(x - b)$ au lieu de $(x - c)$.

Je terminerai cette note en signalant aux lecteurs des

Annales une communication faite à la Société philomathique, le 21 avril 1838, par M. Babinet, à l'occasion du mémoire cité. Le savant physicien y donne une formule déduite du principe des vitesses virtuelles, au moyen de laquelle on calcule l'action du piston de la machine à vapeur, quand le parallélogramme articulé n'est plus rectangle, et qu'il a tourné d'un angle donné (voir le Bulletin de la Société et le journal *l'Institut*, 1re section).