NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LUCIEN GILLES

Généralisation du théorème I

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 61-64
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__61_1>

GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME I (p. 122, t. I).

PAR M. LUCIEN GILLES,
élève du collége Saint-Louis.

Deux polygones sont semblables lorsqu'ils sont circonscriptibles et que les distances des centres des cercles inscrits aux sommets sont proportionnelles et semblablement placées.

I. *Lemme.* Deux polygones sont égaux lorsqu'ils sont circonscriptibles et que les distances des centres des cercles inscrits aux sommets sont égales et semblablement placées.

En effet, soient les deux polygones ABCDE, A'B'C'D'E' (*fig.* 12, 13), circonscriptibles et tels que $OA = O'A'$, $OB = O'B'$, $OC = O'C'$, etc. Je dis que ces deux polygones sont égaux. L'égalité serait évidente si nous prouvions que $OF = O'F'$; car alors, en tirant les rayons OF, O'F', OG, O'G', etc., nous décomposerions les deux polygones en un même nombre de triangles rectangles égaux deux à deux, comme ayant leurs hypoténuses égales par hypothèse et un côté égal (le rayon des cercles inscrits), et ces triangles seraient semblablement placés.

Or je dis que $OF = O'F'$. En effet, supposons que l'on ait $OF < O'F'$; alors dans les deux triangles rectangles OFE et O'F'E' comme nous avons $OE = O'E'$ si $OF < O'F'$, nous en tirerons $FOE > F'O'E'$. Les deux triangles rectangles AOF, $A'O'F'$, nous donneront semblablement $AOF > A'O'F'$. Ajoutant ces deux inégalités, il viendra $EOA > E'O'A'$. On trouverait de même, en décomposant d'une manière semblable les triangles AOB, $A'O'B'$, BOC, $B'O'C'$, etc., que $AOB > A'O'B'$, $BOC > B'O'C'$, etc. D'où, en ajoutant ces inégalités membre à membre, on trouverait que la somme des angles autour du point O est plus grande que la somme des angles autour du point O', ce qui est absurde.

On prouverait identiquement de la même manière que l'on ne peut pas avoir $OF > O'F'$. Donc l'on a $OF = O'F'$. Donc les deux polygones sont égaux. C. Q. F. D.

II. Soient les deux polygones $ABCDE$, $A_1B_1C_1D_1E_1$, circonscriptibles, et tels que l'on ait :

$$OA : O_1A_1 :: OB : O_1B_1 :: OC : O_1C_1 :: \text{etc.}$$

Je dis qu'ils sont semblables.

En effet, prenons une longueur $O'E' = OE$ et sur cette droite comme côté homologue de O_1E_1 construisons un polygone semblable à $A_1B_1C_1D_1E_1$, soit $A'B'C'D'E'$ (*). Ce polygone est circonscriptible et O' est le centre du cercle inscrit. Tirons les droites $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$, etc.

Les deux triangles $A'O'E'$ et $A_1O_1E_1$ sont semblables par construction ; ils donnent la proportion

$$A_1O_1 : A'O' :: O_1E_1 : O'E'.$$

Mais $O'E' = OE$ par hypothèse. Cette proportion revient donc à celle-ci

$$A_1O_1 : A'O' :: O_1E_1 : OE.$$

Mais nous avons par hypothèse

$$A_1O_1 : AO :: O_1E_1 : OE.$$

(*) On est prié de faire la figure.

Comparant ces deux proportions, on en tire $AO = A'O'$; donc les deux triangles semblables $A'O'B'$ et $A_1O_1B_1$ donnent

$$AO : A_1O_1 :: O'B' : O_1B_1.$$

Mais nous avons aussi par hypothèse

$$AO : A_1O_1 :: OB : O_1B_1\,;$$

on en tire $OB = O'B'$, et on trouve de même

$$OC = O'C',\ OD = O'D',\ OE = O'E'.$$

Donc par le premier théorème le polygone ABCDE est égal au polygone $A'B'C'D'E'$. Mais par construction ce dernier est semblable à $A_1B_1C_1D_1E_1$; donc ABCDE est semblable à $A_1B_1C_1D_1E_1$. C. Q. F. D.

III. On démontre de la même manière que deux polygones sont *équivalents*, lorsqu'ils sont circonscriptibles, et que les distances des centres des cercles inscrits aux sommets sont égales, sans qu'elles soient semblablement placées.

En effet, supposons que les deux polygones ABCDE, $A'B'C'D'E'$ soient circonscriptibles, et tels que

$$OA = O'C',\ OB = O'E',\ OC = O'B',\ OD = O'A',\ OE = O'D'.$$

Nous démontrerons comme précédemment que les rayons des cercles inscrits sont égaux. La seule différence, c'est que les triangles rectangles dans lesquels nous décomposons les deux polygones ne seraient pas semblablement placés, et c'est ce qui fait que les polygones ne sont qu'équivalents.

IV. M. Paul Serret m'a fait remarquer un théorème à peu près analogue à celui que je viens de démontrer sur la similitude des polygones, savoir :

Deux polygones sont semblables lorsqu'ils sont inscriptibles, et que les distances des centres des cercles circonscrits aux côtés sont proportionnelles et semblablement placées.

Ce théorème se démontre de la même manière que le précédent.

La seule différence c'est que dans la première partie du théorème, pour prouver que deux polygones sont égaux lorsqu'ils sont inscriptibles, et que les distances des centres des cercles circonscrits aux côtés sont égales et semblablement placées, on a des triangles rectangles dont les hypoténuses varient; mais alors l'un des côtés de l'angle droit est constant; la conclusion est la même que la précédente. De même pour les polygones équivalents.

V. Il est à remarquer cependant que ces démonstrations n'ont lieu que lorsque les centres des cercles inscrits ou circonscrits sont dans l'intérieur des polygones. Le cas où le centre est *extérieur* reste à démontrer.