NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LE GALLAIS

Seconde solution de la question 162

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 58-61

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__58_1>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 162.

(*V. page* 28).

PAR M. LE GALLAIS,
élève du collège de La Flèche.

ABCDE étant un pentagone plan, représentons par α, β, γ, δ, ε, les aires des triangles ABC, BCD, CDE, DEA, EAB, et par S l'aire du polygone, on a :

$$S^2 - S(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon) + \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\delta+\delta\varepsilon+\varepsilon\alpha = 0 \text{ (Gauss)}$$

ou, pour employer des notations abrégées, $S^2 + P = SS'$ (*fig.* 11).

Je prolonge le côté $\overline{DE}$ indéfiniment dans les deux sens; des points A, B, C, j'abaisse sur la direction de ce côté les perpendiculaires $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ et $\overline{CC'}$:

$$\overline{AA'}=a, \quad \begin{cases} \overline{BB'}=b \\ \overline{A'B'}=b' \end{cases} \quad \begin{cases} \overline{CC'}=c \\ \overline{A'C'}=c' \end{cases} \quad \overline{A'D}=d, \ \overline{A'E}=e.$$

Cela posé, il est facile de voir que

$$S=b'\left(\frac{a+b}{2}\right)+(c'-b')\left(\frac{b+c}{2}\right)-\frac{ae}{2}-c\left(\frac{c'-d}{2}\right)=$$
$$=a\left(\frac{b'-e}{2}\right)+b\frac{c'}{2}+c\left(\frac{d-b'}{2}\right).$$

En cherchant par des considérations analogues la mesure des triangles α, β, γ, δ, ε, on arrive à poser les six égalités :

$$S=a\left(\frac{b'-e}{2}\right)+b\frac{c'}{2}+c\left(\frac{d-b'}{2}\right)$$
$$\alpha=a\left(\frac{b'-c'}{2}\right)+b\frac{c'}{2}-c\frac{b'}{2}$$
$$\beta=b\left(\frac{c'-d}{2}\right)+c\left(\frac{d-b'}{2}\right)$$
$$\gamma=c\left(\frac{d-e}{2}\right)$$
$$\delta=a\left(\frac{d-e}{2}\right)$$
$$\varepsilon=a\left(\frac{b'-c}{2}\right)+b\frac{e}{2}.$$

La solution de la question n'est plus, maintenant, qu'une affaire de calcul.

On a immédiatement ·

$$S'=a\left[(b'-e)-\left(\frac{c'-d}{2}\right)\right]+b\left[c'-\left(\frac{d-e}{2}\right)\right]+$$
$$+\left[(d-b')-\frac{e}{2}\right];$$

d'où

$$SS' = a^2\left[\frac{(b'-e)^2}{2} - \frac{(b'-e)(e'-d)}{4}\right] + b^2\left[\frac{c'^2}{2} - \frac{c'(d-e)}{4}\right] +$$

$$+ c^2\left[\frac{(d-b')^2}{2} - \frac{e(d-b')}{4}\right] +$$

$$+ ab\left[c'(b'-e) - \frac{c'(c'-d}{4} - \frac{(b'-e)(d-e)}{4}\right] +$$

$$+ ac\left[(b'-e)(d-b') - \frac{(b'-e)e}{4} - \frac{(c'-d)(d-b')}{4}\right] +$$

$$+ bc\left[c'(d-b') - \frac{ec'}{4} - \frac{(d-e)(d-b')}{4}\right].$$

Ordonnant les doubles produits tels que $\alpha'\beta$ d'une manière analogue, on trouve facilement :

$$P = \frac{a^2}{4}\left[(b'-e)(b'-c') + (b'-c)(d-e)\right] + \frac{b^2}{4}\left[(c'-d)c' + ec'\right] +$$

$$+ \frac{c^2}{4}\left[(d-b')(d-e) - (d-b')b'\right] +$$

$$+ \frac{ab}{4}\left[(b'-c')(c'-d) + (b'-e)(e+c') + (d-e)e\right] +$$

$$+ \frac{ac}{4}\left[(d-e)^2 + (b'-c)(d-b') - b'(b'-e)\right] +$$

$$+ \frac{bc}{4}\left[(c'-d)(d-e) - (c'-d)b' + (d-b')c' - b'e\right].$$

Enfin, le carré de S se développe naturellement suivant ces mêmes espèces de termes qui composent P et SS', et l'on a :

$$S^2 = a^2\,\frac{(b'-e)^2}{4} + b^2\,\frac{c'^2}{4} + c^2\,\frac{(d-b')^2}{4} + ab\,\frac{(b'-c)c'}{2} +$$

$$+ ac\,\frac{(b'-e)(d-b')}{2} + bc\,\frac{(d-b')c'}{2}.$$

Comparant maintenant les expressions de S^2, de P et de SS', il est facile de vérifier que la somme des coefficients dont se trouve affecté un même terme, tel que a^2 ou ab, dans S^2 et dans P, est égale au coefficient du même terme dans SS'. Cela étant vrai pour tous, on a nécessairement :

$$S^2 + P = SS'.$$

Note. Nous offrons cette seconde solution comme exercice de calcul et non comme moyen d'investigation.