NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VANNSON

Note sur la surface du triangle sphérique et sur l'ellipse sphérique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 51-58

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__51_0>

NOTE

sur la surface du triangle sphérique et sur l'ellipse sphérique.

(Fin, voir page 14.)

PAR M. VANNSON, professeur (Versailles).

—

V. Revenons au théorème qui nous a servi de point de départ, savoir : Le sinus de la moitié de la surface d'un triangle égale le sinus de l'arc qui joint les milieux de deux côtés multiplié par le sinus d'un arc mené perpendiculairement au milieu du troisième jusqu'à la rencontre de celui qui joint les deux milieux. Ce théorème est démontré dans les *Annales* par un calcul fort simple ; on peut aussi l'établir géométriquement. Soit ABC (*fig.* 6) le triangle donné, A'B'C' son triangle polaire, m et n les milieux de deux côtés. Il est aisé de voir que le cercle dont m est le pôle divise l'angle B'C'A'' en deux parties égales ; et de même celui dont n est le pôle divise l'angle C'B'A'' en deux parties égales. Le point O où ces deux cercles se coupent est donc le centre du cercle inscrit au triangle B'C'A'' ; soit m' le point de tangence ; on aura :

$$A''m' = \frac{A''C' + A''B' - B'C'}{2} = \frac{A + B + C - \pi}{2} = \text{le } \frac{1}{2} \text{ excès.}$$

D'ailleurs, les deux triangles mRB, C'OA'' sont polaires l'un de l'autre, et d'après leur position, l'angle R $=$ A''O ; enfin l'angle A''Om' est supplément de B'OC', qui lui-même est supplément de mn. Donc l'angle A''O$m' = mn$; or le triangle rectangle A''Om' donne sin A''m' ou

$$\sin \frac{S}{2} = \sin A''O \, . \, \sin A''Om' = \sin mn \, . \, \sin R.$$

C. Q. F. D.

Remarque. Si on prolonge l'arc A″O, le segment pq, intercepté entre les cercles Rm et RB sera perpendiculaire sur le milieu de BC, et égalera A″O. Enfin, si on joint le point B au point S, la surface du triangle donné aura pour mesure le double de l'angle SBk ; en d'autres termes, elle sera double du triangle birectangle SBR.

VI. De ce qui précède on peut conclure la solution du problème : Transformer un quadrilatère qui a deux côtés perpendiculaires au troisième en un triangle équivalent ayant un angle commun avec le quadrilatère. Soit $abcd$ (*fig.* 7) le quadrilatère, b et c ses deux angles droits, o l'intersection de ab avec cd ; à partir du point m, milieu de od, prenez $mp = \frac{\pi}{2}$. Joignez pb ; soit q la rencontre de cet arc avec ad prolongé ; joignez oq, le triangle aqo satisfera à la question. En effet, prenez qS $= qd$, tirez So et prolongez l'arc pb jusqu'à la rencontre en n avec So. On sait (*Annales*, art. cité) que n sera le milieu de So. Donc, d'après ce qui précède, le triangle boc est la moitié du triangle Sod ou $= qod$; mais aod est une partie commune aux deux surfaces. Donc le triangle qoa est équivalent au quadrilatère $abdc$.

Lemme. Étant donné un angle A sur une sphère et un point O, mener un arc OCD, tel qu'on ait OC $=$ CD $=$ arc intercepté dans l'angle. La solution résulte immédiatement du théorème 14ᵉ de l'article ci-dessus indiqué.

VII. *Problème.* Avec un côté donné, l'angle adjacent et la surface, construire un triangle.

Soit AB (*fig.* 8) la base donnée, BAC l'angle adjacent. Supposons que la surface soit représentée par le double du triangle birectangle AKH. Le problème revient à mener par B un arc BDI, tel qu'on ait BD $=$ DI. Pour cela, il n'y a qu'à prendre KO $=$ HK et à mener par O un petit cercle parallèle au cercle AB; l'intersection de ce petit cercle avec AC sera le sommet du triangle demandé. Si l'angle A variait, la construction serait la même; donc le lieu des sommets des triangles de même aire et de même base est un petit cercle parallèle à la base. On peut encore prendre, à partir du point n milieu de AB, $n\mathrm{R} = \frac{\pi}{2}$; tirez l'arc RK, son intersection avec AC donnera le point I.

VIII. Si dans la figure 6, on suppose que l'angle A demeure constant, ainsi que la surface du triangle, dans le triangle polaire B'C'A'', la base B'C', qui est le supplément de A, sera de longueur et de position constante, ainsi que la somme des côtés $\mathrm{B'A''} + \mathrm{A''C'}$; on voit donc que le lieu du point A'' sera une ellipse sphérique ayant pour foyers les points B', C', et pour grand axe la somme constante $\mathrm{B}+\mathrm{C}$; la droite $\mathrm{A}''p$ divisant en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs A''B', A''C' sera normale à cette ellipse, et p sera le pôle d'un arc tangent mené à cette courbe par le point A''; or il est facile de démontrer que le lieu des pôles des arcs tangents à une ellipse sphérique est une seconde ellipse concentrique à la première, et dont les arcs tangents sont perpendiculaires aux arcs normaux de la première; ainsi la base BC, dans toutes ses positions, sera tangente à cette seconde courbe. De là résulte ce théorème :

Si dans un angle donné on mène une infinité d'arcs déterminant avec les côtés de l'angle des triangles de même surface, la courbe enveloppe de tous ces arcs sera une ellipse sphérique, dont les éléments se détermineront de la manière suivante (*fig.* 9) :

Soit BAC l'angle donné; du sommet A comme pôle, décrivez un arc de grand cercle mo; à partir du point p, milieu de mo, prenez $p\mathrm{C'} = p\mathrm{B'} = \frac{\pi - \mathrm{A}}{2}$; B' et C' seront les foyers de la première ellipse dont nous avons parlé ; des points B′, C′, comme pôles, décrivez, avec une distance polaire égale à $\frac{B'C'+S}{2}$ (S désigne la surface donnée), deux arcs de cercles qui se couperont en A″; par les points A″,B′, A″,C′ menez deux arcs de grand cercle, qui se couperont en un autre point A′; puis de A′ comme pôle, tracez l'arc BC ; ABC aura la surface donnée. En effet, cette surface a pour mesure $A+B+C+\pi = B'A''+C'A''-B'C' = S$; joignez A″ au point p, et prolongez l'arc obtenu jusqu'en L, où il rencontre BC ; prenez $pL' = pL$, puis $pq = pq' =$ le complément de C′A″. Les quatre points L, L′, q, q' seront les quatre sommets de l'ellipse cherchée (*).

Il est facile de calculer les deux axes de cette ellipse. En effet, $C'A'' = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{A-S}{2}\right)$; donc pq' que nous appellerons $b = \frac{A-S}{2}$; d'ailleurs, dans le triangle $pA''C'$ on a :

$$\operatorname{tang} pA'' = \operatorname{tang} C'A''.\cos\frac{A}{2} = \cot\left(\frac{A-S}{2}\right)\cos\frac{A}{2};$$

donc

$$\operatorname{tang} pL \text{ ou } \operatorname{tang} a = \frac{1}{\cot\left(\frac{A-S}{2}\right)\cos\frac{A}{2}} = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{A-S}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}};$$

si maintenant on projette un point de la courbe sur les deux axes rectangulaires pA'' et pC', qu'on appelle x le segment px et y le segment py, l'équation de la courbe sera :

$$\frac{\operatorname{tang}^2 y}{\operatorname{tang}^2 b} + \frac{\operatorname{tang}^2 x}{\operatorname{tang}^2 a} = 1. \qquad (^{**})$$

(*) Cette proposition est énoncée sans démonstration dans un mémoire de M. Chasles, imprimé dans le journal de M. Liouville (t. II, p. 102, 1837).

(**) Pour ne pas donner trop d'étendue à cette note, nous avons regardé comme connue l'équation de l'ellipse sphérique. Nous nous proposons de revenir sur ce sujet dans un autre article.

Si on remplace tang a et tang b par leurs valeurs, l'équation du lieu demandé sera :

$$\operatorname{tang}^2 y \cdot \cot^2\left(\frac{A-S}{2}\right) + \operatorname{tang}^2 x \cot^2\frac{A-S}{2}\cos^2\frac{A}{2} = 1,$$

ou plus simplement :

$$\operatorname{tang}^2 y + \operatorname{tang}^2 x \cdot \cos^2\frac{A}{2} = \operatorname{tang}^2\frac{A-S}{2}.$$

IX. Si on donnait sur une sphère un point et un angle, et qu'on demandât de mener par ce point un arc qui fasse avec les côtés de l'angle un triangle de surface connue, le problème se ramènerait, d'après ce qui précède, à conduire par un point donné un arc tangent à une ellipse tracée sur une sphère, question qui se résout par une construction toute semblable à celle du problème analogue sur un plan.

X. Nous avons, dans le théorème précédent, énoncé cette proposition : Le lieu des pôles des arcs tangents à une ellipse sphérique est une autre ellipse sphérique dont les axes ont la même direction que ceux de la première ; et pour longueurs les suppléments des axes de la première. Pour y parvenir, nous commencerons par chercher l'équation d'un grand cercle sur une sphère, connaissant son pôle (*fig.* 10). Soit o le pôle d'un cercle quelconque, ρ sa distance polaire, A l'origine ; projetons le point o sur les deux axes AX, AY. Soit $AP = x'$, $AQ = y'$; m un point quelconque du cercle, que nous projetons en p et en y. Joignons om ; dans le triangle omT, nous avons :

$$\cos\rho = \sin oP \cdot \sin mp + \cos oP \cos mp \cdot \cos Pp.$$

Si $\rho = \frac{\pi}{2}$, cette équation devient :

$$\operatorname{tang} oP \cdot \operatorname{tang} mp + \cos(x - x') = 0 ;$$

mais dans le triangle oPS,

$$\operatorname{tang} oP = \sin PS \cdot \operatorname{tang} AQ = \cos x' \cdot \operatorname{tang} y'.$$

De même, $\tang mp = \cos x \tang y$; donc l'équation demandée sera :

$$\tang y \tang y' + \tang x \tang x' = -1.$$

L'équation de l'ellipse étant, comme nous l'avons rappelé ci-dessus :

$$\left(\frac{\tang y}{\tang b}\right)^2 + \left(\frac{\tang x}{\tang a}\right)^2 = 1,$$

et ne différant de celle de l'ellipse plane qu'en ce que les quantités x, y, etc. sont remplacées par leurs tangentes, il est facile de démontrer qu'il en sera de même pour l'équation d'un grand cercle tangent à la courbe. Ce sera :

$$\tang^2 a \tang y \tang y'' + \tang^2 b \tang x \tang x'' = \tang^2 a \tang^2 b,$$

x'', y'' étant les coordonnées du point de contact, pour exprimer que cette équation est identique à celle du grand cercle ci-dessus trouvée, cherchons pour chacun des deux cercles l'intersection avec les axes, et égalons les résultats, nous aurons :

$$\frac{\tang^2 a}{\tang x''} = -\frac{1}{\tang x'} \quad \text{et} \quad \frac{\tang^2 b}{\tang y''} = -\frac{1}{\tang y'};$$

d'où

$$\tang x'' = -\tang^2 a . \tang x' \quad \text{et} \quad \tang y'' = -\tang^2 b . \tang y'.$$

Portant ces valeurs de $\tang y''$, etc. dans l'équation de l'ellipse, nous aurons :

$$\frac{\tang^2 y'}{\cot^2 b} + \frac{\tang^2 x'}{\cot^2 a} = 1.$$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

XI. On peut se proposer la question générale de trouver, étant donnée une courbe quelconque sur une sphère, le lieu des pôles des cercles tangents menés aux points de cette courbe. Pour cela, par deux points de la courbe $(x', y' . x'' y'')$

faisons passer un cercle, et désignons par α, β les coordonnées du pôle de ce cercle ; son équation sera :

$$\operatorname{tang} y \operatorname{tang} \beta + \operatorname{tang} x \operatorname{tang} \alpha = -1 ;$$

comme le cercle doit passer par les deux points donnés, on aura :

$$\operatorname{tang} y' \operatorname{tang} \beta + \operatorname{tang} x' \operatorname{tang} \alpha = -1,$$
$$\operatorname{tang} y'' \operatorname{tang} \beta + \operatorname{tang} x'' \operatorname{tang} \alpha = -1.$$

Retranchant ces deux équations membre à membre, on trouve :

$$(\operatorname{tang} y' - \operatorname{tang} y'') \operatorname{tang} \beta + (\operatorname{tang} x' - \operatorname{tang} x'') \operatorname{tang} \alpha = 0,$$

ou

$$\sin(y' - y'') \operatorname{tang} \beta \cos x' \cos x'' + \sin(x' - x'') \operatorname{tang} \alpha \cos y' \cos y'' = 0,$$

ou

$$\frac{\sin(y' - y'')}{\sin(x' - x'')} \operatorname{tang} \beta \cos x' \cos x'' + \operatorname{tang} \alpha \cos y' \cos y'' = 0.$$

Si les deux points se réunissent en un seul, le rapport $\frac{\sin(y' - y'')}{\sin(x' - x'')}$ tendra vers une limite que nous représenterons par la notation ordinaire $\frac{dy'}{dx'}$, et nous aurons :

$$\frac{dy'}{dx'} \operatorname{tang} \beta \cos^2 x' + \operatorname{tang} \alpha \cos^2 y' = 0.$$

Nous avons aussi la relation exprimant que le cercle proposé passe par le point $x'y'$,

$$\operatorname{tang} \beta (\operatorname{tang} y - \operatorname{tang} y') + \operatorname{tang} \alpha (\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x') = 0.$$

Éliminant $\frac{\operatorname{tang} \beta}{\operatorname{tang} \alpha}$, on a enfin pour équation du cercle tangent en un point $x'y'$ d'une courbe quelconque sur la sphère ·

$$\frac{\operatorname{tang} y - \operatorname{tang} y'}{\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} x'} = \frac{dy'}{dx'} \cdot \frac{\cos^2 x'}{\cos^2 y'} ;$$

mais α et β désignent les coordonnées du pôle de ce cercle ; l'équation précédente doit être identique à l'équation

$$\operatorname{tang} y \operatorname{tang} \beta + \operatorname{tang} x \operatorname{tang} \alpha = -1 ;$$

ce qu'on exprime en écrivant que les deux cercles ainsi représentés coupent les axes aux mêmes points. On trouve ainsi :

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{2dy' \cos^2 x'}{dx' \sin 2y' - dy' \sin 2x'} ;$$

$$\operatorname{tang} \beta = \frac{-2dx' \cos^2 y'}{dx' \sin 2y' - dy' \sin 2x'} .$$

Si entre ces deux équations et celle de la courbe donnée on élimine x' et y', on aura l'équation du lieu demandé.

Note. Ces diverses propriétés, peu connues en France, ont été traitées avec étendue par M. Gudermann, dans son traité de Géométrie sphérique et dans divers mémoires insérés dans le journal de M. Crelle ; ce qui n'ôte rien au mérite de ce beau travail. Tm.