Considérations sur les racines des équations algébriques, d'après M. Minding de Berlin

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 443-447

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__443_1>

CONSIDÉRATIONS

sur les racines des équations algébriques.

D'aprés M. Minding de Berlin (Crelle, t. XX, p. 168, 1840).

1. *Définition* et *notation.* — Soit une fonction d'une variable $F(x)$; si dans le développement de cette fonction on remplace x par Fx, on obtient un second développement qu'on écrit $FF(x)$, ou bien $F_2(x)$; si dans ce second développement on remplace encore x par Fx, on obtient $FFF(x)$, ou $F_3(x)$; c'est ce qu'on nomme des *fonctions répétées.*

2. *Théorème.* — Dans une équation algébrique dont les racines sont des grandeurs quelconques *indépendantes* les unes des autres, toutes les racines sont des fonctions *répétées* de l'une quelconque d'entre elles.

Démonstration. Soient x_1, $x_2 \ldots . x_n$ des grandeurs indépendantes qu'on peut considérer comme racines de l'équation $X = x^n - ax^{n-1} + bx^{n-2} \ldots . = 0$; ensuite α étant une racine *primitive* de l'équation $\alpha^n - 1 = 0$; posons :

$$nt_1 = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \ldots\ldots \alpha^{n-1} x_n,$$
$$nt_2 = x_2 + \alpha^2 x_2 + \alpha^4 x_3 + \ldots\ldots \alpha^{n-2} x_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$nt_\mu = x_\mu + \alpha' x_2 + \alpha^{2\mu} x_3 + \ldots\ldots \alpha^{n-\mu} x_n$$

On en déduit, en faisant $\beta=\alpha^{-1}$,

$$x_1=\frac{a}{n}+t_1+t_2+\ldots\ldots t_{n-1},$$

$$x^2=\frac{a}{n}+\beta t_1+\beta^2 t_2\ldots\ldots \beta^{n-1}t_{n-1},$$

. . . .

$$x_{\mu+1}=\frac{a}{n}+\beta^{\mu}t_1+\beta^{2\mu}t_2+\ldots\ldots \beta^{n-\mu}t^{n-1}.$$

Faisons $t_1^n=p$; il est évident que p dépend d'une équation de degré 1.2.3 ...... n, nombre de permutations entre les racines; mais les permutations *cycliques* donnent les mêmes valeurs pour t_1^n, par exemple en changeant 1 en 2, 2 en 3 ...... et n en 1 ; t_1 devient αt_1; donc l'équation en p est la puissance $n^{ième}$ d'une polynôme de degré

$$1.2.3\ldots\ldots n-1=m;$$

les coefficients font des fonctions entières de a, b, c, etc., et cette équation peut encore être réduite, comme le fait voir Lagrange dans la célèbre note XIII (*Résolution des équations numériques*). Faisons $\nu_\mu=n^{-\mu+1}t_\mu t_1^{-\mu}$, et formons l'expression

$$\nu_\mu=nt_\mu(nt_1)^{-\mu}=(x_\mu+\alpha^\mu x_2+\alpha^{2\mu}x_3+\ldots\alpha^{n-\mu}x_n)(x_1+\alpha x_2+\alpha^2 x_3+\ldots\alpha^{n-1}x_n)^{-\mu};$$

ν_μ montera aussi au degré m. Donc, d'après la méthode de Lagrange, on peut exprimer ν_μ rationnellement en p (*v.* t. I, Hermite) et l'on peut toujours faire disparaître p du dénominateur; l'on a :

$$\nu_\mu=\mathrm{A}+\mathrm{B}p+\mathrm{C}p^2+\ldots\mathrm{M}p^{m-1};$$

A, B, C sont des fonctions rationnelles de a, b, c, et l'équation $\nu_\mu=n^{-\mu+1}t_\mu t_1^{-\mu}$ donne $t_\mu=n^{\mu-1}\nu_\mu t_1^{\mu}$; les expressions des racines de ci-dessus deviennent :

$$x_1=\frac{a}{n}+t_1+n\nu_2t_1^2+n^2\nu_3t_1^3+\ldots n^{n-2}\nu_{n-1}t_1^{n-1}=f(t_1),$$

$$x_2 = \frac{a}{n} + \beta t_1 + n\nu_2\beta^2 t_1^2 + \ldots \nu_{n-1}\beta^{n-1} t_1^{n-1} = f(\beta t_1),$$

etc.

ou $x_1 = f(t_1)$, $x_2 = f(\beta t_1)$, $x_3 = f(\beta^2 t_1) \ldots . x_n = f(\beta^{n-1} t_1)$

et x_1 est une fonction rationnelle de degré $n - 1$ en t, et de degré $m - 1$ en p.

Les équations $t^n - p = 0$ et $f(t) - x_1 = 0$ ont en commun la racine t_1, et pas d'autres. En effet, toutes les racines de la première de ces équations sont de la forme $\beta_\mu t_1$, μ étant un nombre entier compris entre 0 et n; donc si la racine $\beta^\mu t_1$ appartenait aussi à la seconde de ces équations, on aurait $f(\beta^\mu t_1) - x_1 = 0$ ou $x_{\mu+1} = x_1$; l'équation donnée aurait donc des racines égales, ce qui est contraire à l'hypothèse; cherchant donc le diviseur commun aux deux polynômes $t^n - p$ et $f(t) - x$, on trouve $t_1 = \psi(x_1)$, où ψ est une fonction entière de degré $n - 1$ en x_1, et les coefficients sont des polynômes en p de degré $m - 1$; les coefficients de ces polynomes étant des fonctions rationnelles de a, b, c, etc.

De $x_1 = f(t_1)$, on a déduit $t_1 = \psi(x_1)$; et comme $x_2 = f(\beta t_1)$, on en déduira $\beta t_1 = \psi(x_2)$; de même $\beta^2 t_1 = \psi(x_3) \ldots \beta^{n-1} t_1 = \psi(x_4)$, d'où $x_2 = f(\beta\psi x_1)$, $x_3 = f(x^1)$, $x_3 = f(\beta\psi x_2)$, etc.

Faisant $f(\beta\psi(x_\mu) = F(x_\mu)$, on aura :

$$x_2 = F(x_1),\ x_3 = F(x_2) \ldots .\ x_4 = F(x_{n-1}),\ x_1 = F(x_4),$$

ou $x_2 = F(x_1)$, $x_3 = F_2(x_1) \ldots x_n = F_{n-1}(x_1)$; $x_1 = F_n(x_1)$, C.Q.F.D.

Application. Soit l'équation $x^3 - 3bx - 2c = 0$,

$$3t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3;\ t^3 = p,$$

il faut former l'équation

$$\left(p - \frac{(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x^3)^3}{27}\right)\left(p - \frac{(x_1 + \alpha^1 x_2 + \alpha x^3)^3}{27}\right) = 0;$$

on a :

$\Sigma x_1^3 = +6c$; $\Sigma x_1^2 x_2 = -6c$, $(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^1 x^3)(x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x^3)$ $= \Sigma x_1^2 + 3b = -3b$; $\Sigma x_1^2 = 6b$, d'où $$p^2 - 2cp + b^3 = 0,$$

on a $$v_2 = 3t_2(3t_1)^{-1} = \frac{t_2 t_1}{t_1 3} = \frac{b}{3p};$$

d'où $$x_1 = t + \frac{b}{p}t^2 = f(t);\ x_2 = f(\beta t),$$

$$x_3 = f(\beta^2 t),\ px = pt + bt^2,\ ptx = pt^2 + bp.$$

Éliminant t^2, il vient :

$$t = \frac{px_1 + b^2}{p + bx_1};$$

on a $$bx_1^2 = bt^2 + \frac{b^3 t}{p} + 2b^2,$$

$$\frac{b^3 t}{p} = t(2c - p);\ \text{donc}\ bx_1^2 = bt^2 + t(2c - p) + 2b^2,$$

$$bx_1^2 - px_1 = 2t(c - p) + 2b^2;\ t = \frac{b^2 + \frac{1}{2}(px_1 - bx_1^2)}{p - c};$$

$$x_2 = \beta t + \frac{b}{p}\beta^2 t^2 = \beta t + \beta^2(x_1 - t) = (\beta - \beta^2)t + \beta^2 x_1;$$

$$p = c + \frac{1}{\sqrt{c^2 - b^3}};\ \beta^2 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2};\ \beta - \beta^2 = \sqrt{-3};$$

$$t = \frac{b^2 + \frac{1}{2}cx_1 - \frac{1}{2}bx_1^2}{\sqrt{c^2 - b^3}} + \frac{1}{2}x_1;$$

$$x^2 = \frac{\sqrt{-3}}{\sqrt{c^2 - b^3}}\left[b^2 + \frac{1}{2}cx_1 - \frac{1}{2}bx_1^2\right] - \frac{1}{2}x_1 = F(x_1);$$

$$x_3 = F(x_2) = F_2(x_1);\quad x_1 = F_3(x_1).$$

Ainsi connaissant une racine, on peut par son moyen, calculer de suite les deux autres. On peut toujours supposer que x est réel; dans ce cas les deux autres racines sont réelles ou imaginaires, selon qu'on a $c^2 < b^2$ ou $c^2 > b^2$; lorsque $c^2 = b^3$, l'équation a deux racines égales et la formule n'est plus applicable et dans ce cas le facteur :

$$b^2 + \frac{1}{2}cx_1 - \frac{1}{2}bx_1^2$$

se réduit aussi à zéro; car $x_1 = -\sqrt{b}$ ce qu'on sait par la méthode ordinaire.

2° x_1 étant une racine, on trouve pour les deux autres racines, par la méthode connue :

$$x = \frac{-x_1 = \sqrt{12b - 3x_1^2}}{2},$$

comparant les deux expressions, il vient :

$$2b^2 + cx_1 - bx_1^2 = \sqrt{(c^2 - b^3)(4b - x_1^2)},$$

ainsi pour x_1 réel, la quantité sous le radical est positive ; lorsque $c^2 > b^3$, il n'y a qu'une racine réelle $< 2\sqrt{b}$ et lorsque $c^2 < b^3$, les trois racines sont chacune $> 2\sqrt{b}$.

Historique. Cette manière remarquable de présenter les racines de l'équation cubique est due à M. le professeur Hill (Crelle, IX, p. 100). M. Minding a amplifié la proposition et démontré que dans toutes les équations algébriques, toutes les racines peuvent être mises sous une forme *cyclique*, qu'on peut mettre en évidence pour les équations de deuxième, troisième et quatrième degré; possibilité virtuelle pour les degrés supérieurs; car, l'exécution dépend de la résolution d'équations qui dépassent le quatrième degré et dont l'impossibilité a été établie par Abel.