A. WATELET

Théorèmes sur le point de moyenne distance

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 441-443
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__441_1>

THÉORÈMES

Sur le point de moyenne distance.

PAR M. A. WATELET,
Officier d'Académie, Directeur de l'école primaire supérieure de Soissons.

Théorème. I. Soit n points donnés dans l'espace ; qu'on prenne le centre de moyenne distance de $n—1$ de ces points ;

on peut faire cette opération n fois; on aura ainsi n nouveaux points dont le centre de moyenne distance est le même que celui des n points donnés.

Démonstration. Soient x_p, y_p, z_p les coordonnées d'un des points; donnant à l'indice p successivement les valeurs $1, 2, 3 \ldots n$, on aura ainsi les trois n coordonnées des n points; les coordonnées du centre de moyenne distance sont $\frac{\Sigma_1^n x_p}{n}$; $\frac{\Sigma_1^n y_p}{n}$; $\frac{\Sigma_1^n z_p}{n}$; ou $\frac{X}{n}$, $\frac{Y}{n}$, $\frac{Z}{n}$; séparant le point (x_1, y_1, z_1); le centre de $m.\ d.$ des $n-1$ points restants a pour coordonnées $\frac{X-x_1}{n-1}$, $\frac{Y-y_1}{n-1}$; $\frac{Z-z}{n-1}$ d'où il résulte que le centre de $m.\ d.$ des n nouveaux points a pour coordonnées $\frac{(n-1)X}{n(n-1)}=\frac{X}{n}$; $\frac{(n-1)Y}{n(n-1)}=\frac{Y}{n}$; $\frac{(n-1)z}{n(n-1)}=\frac{Z}{n}$;

C. Q. F. D.

Corollaire. En opérant sur les nouveaux points comme sur les premiers, et ainsi de suite, le centre des moyennes distances des points donnés est le *point limite*.

II. *Applications*. 1° $n=3$; les milieux des côtés du premier triangle sont les sommets du second triangle, semblable au précédent et dans une position renversée. 2° $n=4$; points dans un même plan; le second quadrilatère est semblable au premier et dans une position inverse; et en poursuivant la même opération tous les sommets homologues sont sur une même droite; $n=4$; les points sont les sommets d'un tétraèdre; le second tetraèdre, semblable au précédent, dans une position inverse et dont les sommets sont les centres de gravité des quatre faces.

3° $n=5$, ne présente rien de remarquable; mais voici un assez curieux théorème de facile démonstration.

Théorème. Dans un pentagone on peut former avec les diagonales deux systèmes de triangles; cinq formés par une diagonale et deux côtés et cinq formés par un côté et deux diagonales; si l'on cherche les centres de gravité des triangles de l'un des systèmes et qu'on les joigne deux à deux, on détermine un nouveau pentagone; si l'on s'en sert pour faire la même operation en employant les triangles de l'autre système, on obtient un troisième pentagone semblable au premier et placé d'une manière inverse.