Question d'examen sur la sinussoïde

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 436-437

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__436_1>

QUESTION D'EXAMEN

sur la sinussoïde.

Problème. Trouver l'aire d'une sinussoïde.

Solution. Soit $y = \sin x$ l'équation donnée, axes rectangles; cherchons l'aire comprise entre les deux ordonnées y_1, y_2, correspondant aux abscisses x_1, x_2; divisons l'intervalle $x_2 - x_1$ en $n+1$ parties égales, et faisons $x_2 - x_1 = (n+1)h$; l'aire cherchée est évidemment la limite de la suite :

$$h[\sin x_1 + \sin(x_1 + h) + \sin(x_2 + h) + \ldots \sin(x_1 + nh)]$$
$$= \frac{h \sin\left(x_1 + \frac{nh}{2}\right) \sin\frac{h}{2}(n+1)}{\sin\frac{h}{2}} \quad (V.\ \text{t. III, p. 523}).$$

Or, $\frac{nh}{2} = \frac{x_2 - x_1 - h}{2}$; substituant cette valeur, et faisant ensuite $h = 0$ et $\frac{h}{\sin\frac{h}{2}} = 2$, il vient pour l'aire cherchée: $2\sin\frac{1}{2}(x_2 + x_1)\sin\frac{1}{2}(x_2 - x_1)$; et lorsque $x_1 = 0$, l'aire devient $1 - \cos x_2$; c'est ce que donne immédiatement le calcul intégral.