NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G.-H. NIEVENGLOSKI

Note sur les valeurs qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, 1^{\infty}, 0^{\circ}, \infty^{\circ}$, dans les fonctions à une seule variable

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 425-436

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__425_1>

NOTE

sur les valeurs qui se présentent sous la forme $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\times\infty$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}, *dans les fonctions à une seule variable.*

PAR M. G.-H. NIEVENGLOSKI,
Répétiteur au lycée Monge.

On peut être embarrassé aux examens par les expressions qui prennent la forme d'indétermination $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, etc. Une simple transformation lève quelquefois la difficulté; mais ces artifices ne réussissent pas toujours. Pour obvier à cet inconvénient, je crois utile de donner aux candidats la méthode fondée sur les dérivées.

Soient x la variable et y la fonction, liées par $y=f(x)$; h et k étant les accroissements respectifs, on a, comme on sait :

$$\frac{k}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)+\varepsilon.$$

ε est une quantité aussi petite qu'on voudra et s'annulant avec h; $f'(x)$ est ce qu'on appelle la dérivée de $f(x)$, c'est la limite de l'accroissement de la fonction à celui de la variable.

(*) *La ligne donnée* sera, par exemple, une de celles qui passent par les milieux des côtés et interceptent dans les angles du triangle ou les adjacents des triangles isocèles. Les deux lignes fixes seraient deux côtés du triangle.

On sait aussi que cette limite existe toujours, quelle que soit $f(x)$, en d'autres termes, que toute fonction a sa dérivée.

On tire de l'équation précédente :

$$f(x+h)=f(x)+h\{f'(x)+\varepsilon\} \qquad (1)$$

Cela posé, soit $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ la fraction devenant $\dfrac{0}{0}$ pour $x=a$. Pour avoir la véritable valeur de $\dfrac{f(a)}{F(a)}$, observons qu'en vertu de (1) on a :

$$\frac{f(x+h)}{F(x+h)}=\frac{f(x)+h\{f'(x)+\varepsilon\}}{F(x)+h\{F'(x)+E\}}.$$

Et comme $f(a)=0$, $F(a)=0$, il viendra, en supprimant le facteur h :

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{f'(a)+\varepsilon}{F'(a)+E},$$

quelque petit que soit h ; donc pour $h=0$, on aura :

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{f'(a)}{F'(a)}. \qquad (2)$$

Par conséquent, pour avoir la vraie valeur de la fraction $\dfrac{f(a)}{F(a)}$, il faut prendre le rapport des dérivées de ses deux termes et y faire $x=a$.

Si ce dernier rapport devient encore $\dfrac{0}{0}$, on conçoit bien qu'il faudra le traiter de même, c'est-à-dire prendre de nouveau les dérivées de ses deux termes et y faire $x=a$; et ainsi de suite, et si on peut arriver à deux dérivées ne s'annulant pas à la fois, leur rapport sera la vraie valeur de la fraction proposée.

Cette règle s'étend au cas où $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ devient $\dfrac{\infty}{\infty}$ pour $x=a$.

En effet, $$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{\dfrac{1}{F(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}.$$

Et comme $f(a)=\infty$, $F(a)=\infty$, donc, le dernier rapport devenant $\frac{0}{0}$, on peut lui appliquer la règle de (2). Or le rapport des dérivées de ses deux termes est :

$$\frac{\dfrac{F'(x)}{\{F(x)\}^2}}{\dfrac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}},$$ ou bien en effectuant les calculs, $$\left\{\frac{f(x)}{F(x)}\right\}^2\times\frac{F'(x)}{f'(x)};$$

donc en vertu de (2),

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\left\{\frac{f(a)}{F(a)}\right\}^2\times\frac{F'(a)}{f'(a)}.$$

Actuellement, si la vraie valeur de $\frac{f(a)}{F(a)}$ n'est ni 0 ni ∞, en supprimant le facteur commun, il vient :

$$1=\frac{f(a)}{F(a)}\times\frac{F'(a)}{f'(a)} \quad \text{ou bien} \quad \frac{f(a)}{F(a)}=\frac{f'(a)}{F'(a)}. \qquad (3)$$

Si la valeur de $\frac{f(a)}{F(a)}$ est 0, et le cas où elle est ∞ se ramène à celui-ci en renversant la fraction, voici comment M. Liouville opère (*Journal de mathématiques pures*, t. VIII) : ajoutons à la fraction $\frac{f(x)}{F(x)}$ supposée nulle pour $x=a$, la constante C, la somme sera :

$$\frac{f(x)+CF(x)}{F(x)}.$$

Or pour $x=a$ cette fraction devient $\frac{\infty}{\infty}$, et comme alors sa valeur est précisément la constante C qui n'est ni 0 ni ∞, on pourra lui appliquer la règle (3), c'est-à-dire prendre le rapport des dérivées, qui est :

$$\frac{f'(x)+CF'(x)}{F'(x)}, \text{ ou bien } \frac{f'(x)}{F'(x)}+C, \text{ et y faire } x=a,$$

ce qui donne : $C=\frac{f'(a)}{F'(a)}+C$ d'où $\frac{f'(a)}{F'(a)}=0.$

et par suite : $\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{f'(a)}{F'(a)}.$

Par conséquent, quelle que soit la valeur de $\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{\infty}{\infty}$, la règle est la même.

Donc généralement, que $\frac{f(a)}{F(a)}$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$, on a toujours ...... $\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{f'(a)}{F'(a)}.$ (4)

Il y a ici une remarque importante à faire sur $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$. Toutes les fois que la valeur de $\frac{f'(a)}{F'(a)}$ est déterminée, comme c'est celle de $\frac{f(a)}{F(a)}$, cette dernière est aussi déterminée ; mais la réciproque n'est pas vraie. La vraie valeur de $\frac{f(a)}{F(a)}$, observe M. Liouville, peut être déterminée et celle de $\frac{f'(a)}{F'(a)}$ rester essentiellement indéterminée. Ainsi pour $x=\infty$ la vraie valeur de :

$$\frac{x+\cos x}{x+\sin x}, \text{ qui peut s'écrire } \frac{1+\frac{\cos x}{x}}{1+\frac{\sin x}{x}}$$

est l'unité ; tandis que le rapport des dérivées des deux termes $\frac{1-\sin x}{1+\cos x}$ reste tout à fait indéterminé. C'est ce qu'on voit, du reste, en faisant $x=2k\pi+\alpha$ et $k=\infty$, α étant compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Par là le rapport des dérivées devient $\frac{1-\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$. Quantité évidemment indéterminée.

Applications. On suppose ici que les candidats savent prendre la dérivée d'une fonction algébrique et des transcendantes $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, Lx, a^x.

1° $\frac{0}{0}$,

$\frac{\sin x}{x}$ devient $\frac{0}{0}$ pour $x=0$; le rapport des dérivées est $\frac{\cos x}{1}$, or $\frac{\cos x}{1}=1$, donc $\frac{\sin 0}{0}=1$. Ce que l'on savait déjà.

Plus généralement, $\frac{\sin^m x}{x^n}$ devient $\frac{0}{0}$ pour $x=0$. Le rapport de ses dérivées, $\frac{m\sin^{m-1}x\cos x}{nx^{n-1}}$ est encore $\frac{0}{0}$. Mais comme c'est $\frac{\sin^{m-1}x}{x^{n-1}}$ qui devient $\frac{0}{0}$, prenant les dérivées de ses termes, on aura $\frac{(m-1)\sin^{m-2}x\cos x}{(n-1)x^{n-2}}$. Traitant pareillement $\frac{\sin^{m-2}x}{x^{n-2}}$ et les suivants, comme m et n sont entiers, on voit facilement que la vraie valeur de $\frac{\sin^m n}{x^n}$ pour $x=0$ sera 1, 0, ou ∞ selon que $m=n$, $m>n$, $m<n$.

2° $\frac{\infty}{\infty}$.

Pour $x=\infty$ $\frac{L^n(x)}{x^m}$ (*) est $\frac{\infty}{\infty}$. Le rapport de ses dérivées

(*) J'emploie une seule lettre L pour indiquer les logarithmes *népériens*.

est $\dfrac{nL^{n-1}(x)\times\frac{1}{x}}{mx^{m-1}}=\dfrac{nL^{n-1}(n)}{mx^{m}}$ et devient $\frac{\infty}{\infty}$. Mais en allant jusqu'au rapport des $n^{\text{ièmes}}$ dérivées, on aura :

$$\frac{n(n-1)\ldots 1}{m^n x^m}=0 \text{ pour } x=\infty;\text{ donc } \frac{L^n(x)}{x^m}=0 \text{ pour } x=\infty.$$

Cela devait être, un nombre croît plus rapidement que son logarithme.

$\dfrac{e^x}{x^n}$ devient $\frac{\infty}{\infty}$ pour $x=\infty$. Le rapport des dérivées, $\dfrac{e^x}{nx^{n-1}}$, est encore $\frac{\infty}{\infty}$. Poursuivant jusqu'aux $n^{\text{ièmes}}$ dérivées on a $\dfrac{e^x}{n(n-1)\ldots 1}=\infty$. Donc $\dfrac{e^x}{x^n}=\infty$ pour $x=\infty$. L'exponentielle croît plus rapidement que le nombre. En cherchant les asymptotes de la courbe $\rho=\dfrac{k}{\cos n\omega}$, on a, comme on sait : $\delta=\rho\sin(\omega-\omega')$, $\omega'=\dfrac{\pi}{2n}(2k+1)$.

Posant $\omega-\omega'=\varepsilon$, il vient $\delta=\dfrac{k\sin\varepsilon}{\cos\left(n\varepsilon+k\pi+\frac{\pi}{2}\right)}$, qui est $\frac{0}{0}$ pour $\varepsilon=0$. Or le rapport des dérivées,

$$\frac{k\cos\varepsilon}{-n\sin\left(n\varepsilon+k\pi+\frac{\pi}{2}\right)} \text{ devient } \frac{k}{-n}, \text{ donc } \lim\delta=-\frac{k}{n}\ (*).$$

3° $0\times\infty$.

On ramène ce cas à l'un des deux précédents. En effet, $f(x)\times F(x)=\dfrac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}}=\dfrac{F(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ et si $f(a)=0$, $F(a)=\infty$, on aura $0\times\infty=\frac{0}{0}=\frac{\infty}{\infty}$. Mais il n'est pas indifférent de prendre l'une ou l'autre forme.

(*) Voir Bertrand, Journal de Liouville, VI, 15, 1841.

Th.

Ainsi, $e^{\frac{1}{x}} x^m$ devient $\infty . 0$ pour $x=0$. Si on l'écrit : $\dfrac{x^m}{e^{-\frac{1}{x^n}}}$ et qu'on prenne le rapport des dérivées on a :

$$\frac{mx^{m-1}}{ne^{-\frac{1}{x^n}}x^{-n-1}}=\frac{mx^{m+n}}{ne^{-\frac{1}{x^n}}},$$ ce qui montre qu'on ne réussira pas de la sorte. Mettons alors le produit proposé sous la forme $\dfrac{e^{\frac{1}{x^n}}}{x^{-m}}$, et prenons le rapport des dérivées, il viendra $\dfrac{ne^{\frac{1}{x^n}}x^{-n-1}}{mx^{-m-1}}=\dfrac{ne^{\frac{1}{x^n}}}{mx^{-m+n}}$; actuellement si $m \overline{\underline{<}}\, n$ ce rapport est ∞; si $m>n$ on prendra de nouveau les dérivées et l'on aura $\dfrac{n^2e^{\frac{1}{x^n}}}{m(m-n)x^{-m+2n}}$; en poursuivant, on voit bien que, quels que soient m et n, le produit $e^{\frac{1}{x^n}}\times x^m$ est toujours ∞, pour $x=0$.

4° Symboles d'indétermination : $1^{\pm\infty}$, 0^0, ∞^0.

$x^{\pm\frac{1}{x-1}}$ devient $1^{\pm\infty}$ pour $x=1$. Posons $v=x^{\pm\frac{1}{x-1}}$, de là $Lv=\pm\dfrac{Lx}{x-1}$; on est ainsi ramené au symbole $\frac{0}{0}$. Or le rapport des dérivées de $\dfrac{Lx}{x-1}$ étant $\dfrac{1}{x}$, on a pour $x=1$.

$$L.x^{\pm\frac{1}{x-1}}=\pm 1, \text{ et par suite, } 1^{\pm\infty}=e^{\pm 1}.$$

Il ne s'ensuit pas cependant qu'une fonction de x devenant $1^{\pm\infty}$, sa valeur soit toujours $e^{\pm 1}$. En effet, $\left[\dfrac{L(x+1)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}$ devient $1^{+\infty}$ pour $x=0$. Or

$$\mathrm{L}.\left[\frac{\mathrm{L}(x+1)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=\frac{\mathrm{L}.\dfrac{\mathrm{L}(x+1)}{x}}{x}=\frac{0}{0}.$$

Prenant successivement le rapport des dérivées, on a pour $x=0$:

$$\frac{x-(x+1)\,\mathrm{L}(x+1)}{x(x+1)\ \mathrm{L}(x+1)}=\frac{-\mathrm{L}(x+1)}{(x+1)\,\mathrm{L}(x+1)+x\mathrm{L}(x+1)+x}=-$$

$$\frac{\dfrac{1}{x+1}}{2+2\mathrm{L}(x+1)+\dfrac{1}{x+1}}=-\frac{1}{2};$$

donc

$$\mathrm{L}.\left[\frac{\mathrm{L}(0+1)}{0}\right]^{\frac{1}{0}}=-\frac{1}{2},$$

et par suite

$$\left[\frac{\mathrm{L}(0+1)}{0}\right]^{\frac{1}{0}},\ \text{ou bien } 1^{+\infty}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

On a de même $\left[\dfrac{\sin x}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=1^{\infty}$ pour $x=0$; or

$$\mathrm{L}.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{\mathrm{L}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)}{x}.$$

Prenant les rapports des dérivées successives, on aura pour $x=0$.

$$\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}=\frac{-\sin x}{x\cos x+\sin x}=-\frac{x\cos x+\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0;$$

donc, pour $x=0$:

$$\mathrm{L}.\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=0,\ \text{et par suite } \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}},\ \text{ou bien } 1^{\infty}=1.$$

x^x devient 0^0 pour $x=0$; or $\mathrm{L}.x^x=x\mathrm{L}x$. On est ramené au symbole $0\times\infty$.

Écrivant le produit $x\mathrm{L}x$ sous la forme $\frac{\mathrm{L}x}{x^{-1}}$ et prenant le rapport des dérivées, il vient.

$$\frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}}=-x;$$

donc, pour $x=0$, $\mathrm{L}.x^x=0$, et par suite $0^0=1$.

Une expression peut prendre accidentellement la forme 0^0, comme $\left(k^{\frac{1}{\sin x - x}}\right)^x$ pour $x=0$; mais il suffit d'effectuer les calculs, et l'on a : $k^{\frac{x}{\sin x - x}}=k^{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}-1}}=0$ pour $x=0$.

Si l'on admettait, dit M. Terquem, que 0^0 soit constamment égal à 1, on serait conduit à cette conclusion absurde, que dans la surface transcendante $z=x^y$, tout l'axe des y appartient à la surface excepté le point servant d'origine » Dans ce cas $z = x^y = 0^0$ désigne z indéterminé. — (Voyez les *Nouv. Annal. de Math.*, tome VI, p. 109 et 391.)

$x^{\frac{1}{x}}$ devient ∞^0 pour $x=\infty$. Or $\mathrm{L}.x^{\frac{1}{x}}=\frac{\mathrm{L}x}{x}=\frac{\infty}{\infty}$. et comme le rapport des dérivées, pour la même valeur de x, est $\frac{1}{x}=0$; donc pour $x=\infty$; $\mathrm{L}.x^{\frac{1}{x}}=0$, par conséquent $x^{\frac{1}{x}}$ ou bien $\infty^0=1$.

Si l'on demandait la valeur de $(\mathrm{L}x)^x$ qui devient $(-\infty)^0$ pour $x=0$, comme $\mathrm{L}(-\infty)$ est imaginaire, pour l'éviter il suffit de poser $x=2y$ et de faire $y=0$. On aura ainsi $(\mathrm{L}x)^x=[\mathrm{L}^2(2y)]^y$. Or $\mathrm{L}.[\mathrm{L}^2(2y)]^y=\frac{\mathrm{L}.\mathrm{L}^2(2y)}{y^{-1}}=\frac{\infty}{\infty}$ pour $y=0$; le rapport de ses dérivées est

$$\frac{2\,\mathrm{L}(2y)\times\frac{1}{y\mathrm{L}^2(2y)}}{-y^{-2}}=-\frac{2y}{\mathrm{L}(2y)}=0.$$

Donc pour $y=0$, L. $[L^2(2y)]^y=0$, et par suite $[L^2(2y)]^y$, ou bien $(Lx)^x = \infty^0 = 1$.

Il est à remarquer qu'on obtiendra le même résultat en opérant directement sur $[L(x)]^x$ et en prenant le logarithme quoiqu'il soit imaginaire (1).

5° Il est clair que l'on ne pourra pas lever l'indétermination par les dérivées si celles-ci restent constamment et à la fois nulles ou infinies pour la valeur de x de la question.

Ainsi pour $x=0$ on a :

$$\frac{a^{\frac{1}{x^n}}}{b^{\frac{1}{x^m}}} = \frac{\infty}{\infty}.$$ Le rapport des dérivées est $$\frac{n\,\mathrm{L}a.\ a^{\frac{1}{x^n}}\,x^{-n}}{m\mathrm{L}b.\ b^{\frac{1}{x^m}}\,x^{-m}} = \frac{\infty}{\infty};$$

comme l'exponentielle l'emporte (§ 2°), il est aisé de voir que les rapports successifs des dérivées seront toujours $\frac{\infty}{\infty}$, et l'on n'en pourra pas avoir la vraie valeur. Pour $\frac{a^{-\frac{1}{x^n}}}{b^{-\frac{1}{x^m}}}$, ces rapports se présentent constamment $\frac{0}{0}$. Il faut alors un artifice de calcul. Dans le cas actuel il suffit de prendre le logarithme ; on a $\mathrm{L}.\ \frac{a^{\frac{1}{x^n}}}{b^{\frac{1}{x^m}}} = \frac{1}{x^n}\,\mathrm{L}a - \frac{1}{x^m}\,\mathrm{L}b.$ et selon que $m \lessgtr n$ ce logarithme est $\pm\infty$ pour $x=0$; et par suite le nombre sera $+\infty$ ou 0 : si $m=n$ alors, selon que $a \lessgtr b$, le logarithme sera $\pm\infty$, par suite son nombre $+\infty$ ou 0. Le dernier résultat s'obtient directement, car si $m=n$,

(*) Il est à souhaiter que dans ce recueil on démontre que, toute quantité a une infinité de logarithmes imaginaires, et que la quantité *positive seule* a un logarithme réel et une infinité d'imaginaires. (*V.* t. V, p. 79, for. 10)

$$\frac{a^{\frac{1}{x^n}}}{b^{\frac{1}{x^m}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{x^n}}$$ et l'on a évidemment $+\infty$ ou 0, selon que $a \gtrless b$.

Lorsqu'une expression contient des radicaux, l'emploi des dérivées, pour en lever l'indétermination, peut ne plus réussir en donnant constamment $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.

Ainsi, on réussit bien dans l'exemple suivant contenant trois radicaux, et l'on a pour $x=1$

$$\frac{0}{0}=\frac{x^{\frac{3}{2}}-1+(x-1)^{\frac{5}{3}}}{(x^2-1)^{\frac{3}{4}}}=\frac{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}}}{\frac{3}{2}(x^2-1)\times x^{-\frac{1}{4}}}=\frac{\frac{3}{2}}{\infty}=0,$$

tandis que l'on ne peut plus lever l'indétermination par la règle des dérivées dans l'exemple suivant, qui ne contient que deux radicaux; car on a, pour $x=a$,

$$\frac{0}{0}=\frac{(x^2-a^2)^{\frac{1}{2}}}{(x-a)^{\frac{2}{3}}}=\frac{(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}x}{\frac{2}{3}(x-a)^{-\frac{1}{3}}}=\frac{(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x(x^2-a^2)^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}(x-a)^{-\frac{4}{3}}}=\ldots=\frac{\infty}{\infty}$$

Il faut alors recourir à un artifice de calcul. Or, comme $x=a$ annule les deux termes, substituons $x=a+h$; les réductions faites, divisons par la plus petite puissance de h, après quoi faisons $h=0$; le résultat sera la valeur cherchée. On aura ainsi :

$$\frac{\left\{(a+h)^2-a^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{(a+h-a)^{\frac{1}{3}}}=\frac{(2a+h)^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{3}}}=2(a+h)^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{6}}=0 \text{ pour } h=0.$$

On trouvera de même pour $x=-a$

$$\frac{(x^2-a^2)^{\frac{1}{3}}+(x+a)^{\frac{3}{2}}+x^3+a^3}{(x+a)^{\frac{1}{3}}+(a^3-3ax^2-2x^3)^{\frac{2}{5}}}=\sqrt[3]{-2a}.$$

Comme on voit, ce procédé revient, dans les fonctions algébriques, à leur ôter les racines communes.

Soit pour dernier exemple :

$$\frac{L^{\frac{2}{3}}(x)+(1-x^2)^{\frac{3}{4}}\cos(1-x)^{\frac{1}{x-1}}}{\sin^{\frac{2}{3}}(x-1)+a^{-\frac{1}{x-1}}}=\frac{0}{0} \text{ pour } x=1.$$

Substituant $x=1+h$ et divisant par $h^{\frac{2}{3}}$, il vient :

$$\frac{\dfrac{L^{\frac{2}{3}}(1+h)}{h^{\frac{2}{3}}}+(-2+h)^{\frac{3}{4}}h^{\frac{1}{12}}(\cos h)^{\frac{1}{h}}}{\dfrac{\sin^{\frac{2}{3}}h}{h^{\frac{2}{3}}}+\dfrac{a^{-\frac{1}{h}}}{h}\times h^{\frac{1}{3}}}=1 \text{ pour } h=0,$$

car pour $h=0$, $\dfrac{L(1+h)}{h}=1$, $\cos^{\frac{1}{h}}h=1$, $\dfrac{\sin h}{h}=1$, $\dfrac{a^{-\frac{1}{h}}}{h}=0.$