Nouvelles annales de mathématiques

Terquem

Seconde démonstration du théorème de Newton sur les asymptotes (V. p. 385) et théorème sur les points multiples

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 422-424

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__422_1>

SECONDE DÉMONSTRATION

du théorème de Newton sur les asymptotes (V. p. 385)
et théorème sur les points multiples.

Lemme. 1. $P_n + P_{n-1} + \ldots P_{n-p} + \ldots P_0 = 0$ (1) étant une équation de degré n, P_n renferme les termes de degré n et ainsi des autres. Si l'on compose une fonction symétrique entière de degré p avec les n segments, comptés de l'origine sur un des axes coordonnés, la valeur de cette fonction dépend de coefficients qui se trouvent dans les fonctions :

$$P_n, \ P_{n-1} \ldots . \ P_{n-p}.$$

Corollaire 1. La valeur de cette fonction ne change donc pas pour deux courbes qui ont les termes $P_n + P_{n-1} + \ldots + P_{n-p}$ en commun.

Corollaire 2. L'équation qui renferme le système des asymptotes à la courbe a avec elle en commun $P_n + P_{n-1}$ donc $p = 1$; et désignant la fonction symétrique du 1er degré par ΣX pour les asymptotes et par Σx pour la courbe, on a $\Sigma X = \Sigma x$ ou bien $\Sigma (X - x) = 0$; c'est le théorème de Newton ; car une sécante quelconque peut être prise pour axe des x.

Corollaire 3. Les intersections de deux courbes ayant en commun les $p+1$ premiers polynômes sont évidemment sur une courbe de degré $n-p-1$; donc si $p=1$, les intersections sont sur une ligne de degré $n-2$; par conséquent sur une droite pour les lignes du troisième ordre et sur une conique pour une ligne du quatrième ordre.

2. M. Plucker dans son Traité de géométrie analytique de 1835 (*), a donné la discussion et la théorie des propriétés les plus complètes des courbes du troisième ordre ; en prenant pour axes des coordonnés la droite des intersections asymptotiques, on simplifie l'équation et on facilite les démonstrations. Nous ne mentionnons pour le moment que cette proposition. Soit $U = 0$ l'équation rendue homogène d'une

(*) System der analytischen geometrie auf neue betrachturgen gegrundet und insbesendere eine ausfuhrliche theorie der curven dritten ordnung enthaltend. Bonn, 1835, in-4., 222 p. Système de géométrie analytique fondé sur de nouvelles considerations, et contenant en particulier une theorie complète des courbes du troisième ordre.

ligne de l'ordre n; si ces trois équations subsistent $\frac{dU}{dx}=0$; $\frac{dU}{dy}=0$; $\frac{dU}{dz}=0$, la courbe a des points multiples; ces points satisfont donc à l'équation $\frac{dU}{dx}+\frac{dU}{dy}+\frac{dU}{dz}=0$; donc les points multiples sont sur une ligne d'ordre $n-1$, par conséquent sur une conique dans une courbe du troisième degré.