NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. VACHETTE

Problème combinatoire

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 421-422

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__421_0>

PROBLÈME COMBINATOIRE.

PAR M. A. VACHETTE,
Licencié ès sciences mathématiques et physiques.

On a 21 cartes qu'on distribue 3 par 3 en 3 paquets de 7 cartes; on fait penser une carte, et on demande le paquet qui la contient, et on le place au milieu du paquet total formé par les 3 paquets : on fait la même distribution une 2^{me} fois, on demande le paquet, on le place au milieu : on fait une 3^{me} distribution, et on place le paquet de la carte au milieu. La carte se trouve au milieu du paquet total, c'est-à-dire au onzième rang.

Ce fait est général pour $2m+1$ paquets composés de $2n+1$ cartes. Suivant les valeurs relatives de m et n, il arrive après la seconde, la troisième ou la $p^{ème}$ distribution.

Après la première, la carte est dans le $(m+1)^{ème}$ paquet, au rang q. Nous supposerons $q>n+1$; s'il lui était égal, le fait aurait déjà eu lieu; s'il lui était inférieur, la distribution commencée par la dernière carte du paquet total nous ferait retomber dans le cas que nous examinons. Prenons pour q sa valeur maximum $2n+1$.

Si $n=$ ou $<m$, à la seconde distribution, toutes les cartes des m premiers paquets et les $n+1$ premières cartes du $(m+1)^{ème}$ paquet étant distribuées, la carte viendra occuper le $(n+1)^{ème}$ rang dans l'un des m derniers paquets que forme cette seconde distribution. Le fait a eu lieu après la seconde distribution.

Si $n>m$, à une distribution quelconque, la carte viendra occuper le $(n+1)^{ème}$ rang; si elle est distante de la carte du milieu d'un nombre de rangs égal ou inférieur à m, et le $(n+1+m)^{\text{ème}}$ rang, si elle en est distante d'un nombre égal ou inférieur à $m+m(2m+1)$. Si donc on a les inégalités $n > m$ et $< m + m(2m+1)$ ou égal, ce sera après la troisième distribution que la carte occupera le $(n+1)^{\text{ème}}$ rang. Ainsi, pour 3 paquets de 7 cartes, $m=1$ et $n=3$, et l'on a bien $3 > 1$ et < 4 ; pour 7 paquets de 49 cartes, $m=3$ et $n=24$, et l'on a bien $24 > 3$ et $=24$; pour $2m+1$ paquets de $(2m+1)^2$ cartes, on a $n=2m^2+2m$, et l'on a bien $2m^2+2m > m$ et $= m+(2m+1)m$.

Si $n > m+m(2m+1)$, après la seconde distribution, la carte aura dans son paquet un rang supérieur à $n+1+m$, et après la troisième distribution, ne pourra occuper le rang $n+1$. Elle y viendra après la quatrième, si après la troisième elle occupe un rang supérieur à $n+1+m$ et inférieur ou égal à $n+1+2m$, c'est-à-dire si après la seconde elle occupe un rang inférieur ou égal à $n+1+m+2m(2m+1)$; si donc $n > m+n(2m+1)$ et $< m+2m(2m+1)$ ou égal, le fait aura lieu après la quatrième distribution.

En général, le fait a lieu après la $p^{\text{ème}}$ distribution pour $n > m+(p-3)m(2m+1)$ et $< m+(p-2)m(2m+1)$ ou égal.