NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

TERQUEM

Relations d'identités et questions fondamentales relatives aux lignes du second degré : polaires réciproques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 409-420

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__409_1>

et questions fondamentales relatives aux lignes du second degré : polaires réciproques (v. p. 315).

RELATIONS D'IDENTITÉS

et questions fondamentales relatives aux lignes du second degré : polaires réciproques (v. p. 315).

LXXXV. *Problème.* Etant données l'équation d'une courbe plane algébrique et celle de la conique directrice, trouver l'équation de la polaire réciproque.

Solution. Mêmes données qu'au problème précédent (LXXXIV). Soient x', y' les coordonnées d'un point de la courbe donnée ; la tangente en ce point a pour équation $Py+Qx+R=0$; P, Q, R sont des fonctions connues de x', y', et de degré $m-1$; x'', y'' étant les coordonnées du pôle de cette tangente, pris par rapport à la directrice, on a :

$$x''[\pi'P+\pi Q+\mu R]=-\nu P+\gamma Q+\pi R,$$
$$y''[\pi'P+\pi Q+\mu R]=-\nu Q+\gamma' P+\pi' R \quad (1)$$ (*V.* t. II, p. 305).

Eliminant x', y' entre ces deux équations, et l'équation donnée, on obtient en x'', y'' l'équation de la polaire réciproque.

Corollaire. Les formules donnent :

$$\left.\begin{aligned}\frac{P}{R}&=\frac{2\alpha y''+\beta x''+\delta}{\delta y''+\varepsilon \qquad \xi}\\ \frac{Q}{R}&=\frac{\nu x''+\beta y''+\varepsilon}{\varepsilon x''+\delta y''+2\xi}\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Donc si l'équation de la courbe est donnée en fonction de $\frac{P}{R}$, $\frac{Q}{R}$, on a de suite la polaire réciproque.

Autrement. Rendons homogène l'équation de la courbe donnée et celle de la conique directrice, en remplaçant x et y par $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ (*V.* p. 5), et représentons par $\varphi=0$ et $\psi=0$ les équations de la directrice et celle de la polaire réciproque ; les équations (3) donnent :

$$\left.\begin{aligned}\frac{dF}{dy'}\cdot\frac{d\varphi}{dz''}-\frac{d\varphi}{dy''}\cdot\frac{dF}{dz'}&=0\\ \frac{dF}{dx'}\cdot\frac{d\varphi}{dz''}-\frac{d\varphi}{dx''}\cdot\frac{dF}{dz'}&=0\end{aligned}\right\} \quad \text{(3) et aussi (4) (*)}$$

(*) Nous nous servirons constamment, et à dessein, de l'algorithme leibnitzien

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d\psi}{dy''}\cdot\dfrac{d\varphi}{dz'}-\dfrac{d\varphi}{dy'}\cdot\dfrac{d\psi}{dz''}=0\\[2ex]\dfrac{d\psi}{dx''}\cdot\dfrac{d\varphi}{dz'}-\dfrac{d\varphi}{dx'}\cdot\dfrac{d\psi}{dz''}=0\end{array}\right\}\quad(4)$$

Pour avoir $\dfrac{d\varphi}{dz''}$ on change x, y, z en x'', y'', z'', et ainsi des autres.

Les deux premières équations donnent :

$$\frac{dF}{dy'}\cdot\frac{d\varphi}{dx''}-\frac{dF}{dx'}\cdot\frac{d\varphi}{dy''}=0.\quad(5)$$

L'équation $F=0$ étant homogène, l'on a :

$$z'\frac{dF}{dz'}+y'\frac{dF}{dy'}+z'\frac{dF}{dz'}=0 \text{ (V. p. 1).}$$

Multipliant donc la première équation (4) par y' et la seconde par x', et les ajoutant, il vient, après avoir divisé par $\dfrac{dF}{dy}$:

$$x'\frac{d\varphi}{dx''}+y'\frac{d\varphi}{dy''}+z'\frac{d\varphi}{dz''}=0\quad(6),$$

équation du second degré et qui remplace avantageusement une équation (4) de degré m. L'interprétation géométrique est que la polaire du point x'', y'', z'' passe par le point x', y', z' ; elle est symétrique par rapport aux variables à un accent et à deux accents, ce qui constitue la réciprocité polaire.

Application. La courbe donnée est une conique à équation hexanome ordinaire ; les équations (3) deviennent :

---

d pour désigner les dérivées ; algorithme que les professeurs de lycée sont tenus en conscience et devraient être astreints d'enseigner ; l'ignorance chez les élèves d'un symbole qui domine toute la science serait honteuse, non pour eux, mais pour leurs professeurs.

$$\left[2A\frac{d\varphi}{dz''}-D\frac{d\varphi}{dy''}\right]+x'\left[B\frac{dx}{dz''}-E\frac{d\varphi}{dy''}\right]$$

$$+z'\left[D\frac{d\varphi}{dz''}-2F\frac{d\varphi}{dy''}\right]=0,$$

$$y'\left[B\frac{d\varphi}{dx''}-D\frac{d\varphi}{dx''}\right]+x'\left[2C\frac{d\varphi}{dx''}+G\frac{d\varphi}{dx''}\right]$$

$$+z'\left[E\frac{d\varphi}{dz''}-2F\frac{d\varphi}{dx''}\right]=0.$$

$$x'=\frac{z'\left[-n\frac{d\varphi}{dy''}+l\frac{d\varphi}{dx'}+k\frac{d\varphi}{dz''}\right]}{m\frac{d\varphi}{dz''}+k\frac{d\varphi}{dx''}+k'\frac{d\varphi}{dy''}}$$

$$y'=\frac{z'\left[-n\frac{d\varphi}{dx''}+l'\frac{d\varphi}{dx''}+k'\frac{d\varphi}{dz}\right]}{m\frac{d\varphi}{dz''}+k\frac{d\varphi}{dx''}+k'\frac{d\varphi}{dy'}}.$$

Prenant la valeur de x' et y' et substituant dans l'équation donnée qui devient divisible par z', et effaçant les accents, on obtient l'équation suivante de la polaire réciproque :

$$m\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2+l'\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+l\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+2k'\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)$$

$$+2k\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)\left(\frac{dy}{dz}\right)-2n\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=0;$$

et faisant $z=1$, on a l'équation ordinaire.

Soit cette équation :

$$A'y^2+B'xy+C'x^2+D'yz+E'xz+F'z^2=0,$$

on a : $A'=m\delta^2+4l'\alpha^2+l\beta^2+4k'\alpha\delta+4k\beta\delta-4n\alpha\beta,$

$$B'=2m\delta\varepsilon+4l'\alpha\beta+4l\beta\gamma+9k'(\beta\delta+2\alpha\varepsilon)+2k(\beta\varepsilon+2\gamma\delta]$$
$$-2n(\beta^2+4\alpha\gamma),$$

$$D'=4m\delta\zeta+4l'\alpha\delta+4l,\varepsilon+2k'(4\varepsilon\zeta+\delta^2)+2k[2\beta\zeta+\delta\varepsilon)$$
$$-2n[2\delta\varepsilon+\beta\delta],$$

$$F'=4m\zeta^2+l'\delta^2+l\varepsilon^2+4k'\delta\zeta+4k\varepsilon\zeta-2n\delta\varepsilon.$$

On conclut C' de A' et E' de D' en permutant l, k, α, δ, en $l', k', \gamma, \varepsilon$, et *vice versâ*.

1° Prenant pour origine un foyer de la courbe donnée et les axes rectangulaires, alors $l=l'$, $n=0$, et pour directrice un cercle ayant son centre à l'origine, on a $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta=\varepsilon=0$, ce qui donne $A'=4lz^2$, $\beta=0$, $C'=4l\alpha^2$, $D'=8k'\alpha\zeta$, $E'=8k\alpha\zeta$, $F'=4m\zeta^2$; ainsi la polaire réciproque est aussi un cercle. (*V.* p. 315.)

2° Soient $Ay^2+Cx^2+F=0$ la conique donnée et $\alpha y^2+\gamma x^2+\zeta^2=0$ la directrice; on a pour équation de la polaire réciproque $CF\alpha^2y^2+AF\gamma^2x^2+AC\zeta^2=0$. Pour que cette polaire se confonde avec la courbe donnée, l'on doit avoir $\frac{A}{F}=\pm\frac{\zeta}{\alpha}$, $\frac{F}{C}=\pm\frac{\zeta}{\gamma}$; ainsi une ellipse et une hyperbole ayant mêmes axes principaux, l'une de ces courbes étant prise pour directrice, l'autre sera elle-même sa polaire réciproque. (*V.* t. V, 368.)

LXXXVI. *Méthode mnémonique.* L'équation de la polaire réciproque peut s'écrire sous une forme qui la grave aisément dans la mémoire.

Soient
$$Ay^2+\beta xy+Cx^2+Dyz+Exz+Fz^2=0,$$
$$\alpha y^2+\beta xy+\gamma x^2+\delta yz+\varepsilon xz+\zeta z^2=0=\varphi;$$

les équations rendues homogènes de la conique donnée et de la directrice; l'équation de la polaire réciproque est :

$$\frac{dL}{dA}\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2+\frac{2dL}{dB}\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\varphi}{dy}+\frac{dL}{dC}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\frac{2dL}{dD}\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dz}$$
$$+\frac{2dL}{dE}\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dz}+\frac{dL}{dF}\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2=0. \qquad (a)$$

Ainsi, dans l'équation donnée, on remplace les coefficients A, B, C, etc., par $\frac{dL}{dA}$, $\frac{dL}{dB}$, et les variables x, y, z, par

$\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$; $\frac{d\varphi}{dz}$, et on double les rectangles; le résultat est l'équation de la polaire réciproque.

Observation 1. On voit donc que tout polynome homogène du second degré à trois variables peut être mis sous la forme (a), φ étant une fonction quelconque de même espèce; car la fonction donnée peut être toujours considérée comme l'équation d'une polaire réciproque par rapport à la fonction φ, équation d'une conique directrice.

Observation 2. L'équation de la polaire réciproque, en la résolvant, se met sous la forme

$$\left[l'\frac{d\varphi}{dy}-n\frac{d\varphi}{dx}+\frac{k'd\varphi}{dz}\right]^2=4L\left[A\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2-E\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dz}+F\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2\right],$$

ou bien :

$$\left[l\frac{d\varphi}{dx}-n\frac{d\varphi}{dy}+k\frac{d\varphi}{dz}\right]^2=4L\left[C\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2-D\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi}{dz}+F\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\right].$$

LXXXVI. *Manière directe de trouver l'équation de la polaire réciproque.* Soient x'', y'', z'' un point de la polaire réciproque, la polaire de ce point est : $x\frac{d\varphi}{dz''}+y\frac{d\varphi}{dy''}+z\frac{d\varphi}{dz''}=0$; pour que cette polaire soit tangente à la conique donnée, on doit avoir :

$$l'\left(\frac{d\varphi}{dy''}\right)^2-2n\frac{d\varphi}{dy''}\,\frac{d\varphi}{dx''}+l\left(\frac{d\varphi}{dx''}\right)^2+2k'\frac{d\varphi}{dy''}\,\frac{d\varphi}{dz''}$$
$$+2k\frac{d\varphi}{dx''}\,\frac{d\varphi}{dz''}+m\left(\frac{d\varphi}{dz''}\right)^2=0 \quad (V.\ \text{t. II}, 305),$$

et effaçant les accents doubles, on a l'équation de la polaire réciproque.

LXXXVII. *Méthode métamorphique.* Lorsque la courbe donnée est une conique, nous avons vu ci-dessus qu'on parvient à la polaire réciproque en remplaçant x et y par $\frac{Y}{X}$, $\frac{Y_1}{X_1}$; Y, X, Y_1, X_1 étant des fonctions linéaires de x et de y, la polaire réciproque est donc un cas particulier de transformation linéaire et peut être obtenue par un procédé de perspective. (*V*. t. V, 419.)

LXXXVIII. *Équation aux différences partielles.* La courbe donnée étant quelconque, alors $x\frac{d\psi}{dx''}+y\frac{d\psi}{dy''}+z\frac{d\psi}{dz''}=0$ est la tangente à la polaire réciproque $\psi=0$, au point de contact x'', y'', z'', et le pôle de cette tangente est :

$$x'=\frac{z'\left[-\nu\frac{d\psi}{dy''}+\lambda\frac{d\psi}{dx''}+\varkappa\frac{d\psi}{dz''}\right]}{\mu\frac{d\varphi}{dz''}+\varkappa\frac{d\varphi}{dx''}+\varkappa'\frac{d\varphi}{dy''}}$$

$$\text{et } y'=\frac{z'\left[-\nu\frac{d\psi}{dx''}+\lambda'\frac{d\psi}{dz''}+\varkappa'\frac{d\psi}{dz''}\right]}{\mu\frac{d\varphi}{dz''}+\varkappa\frac{d\varphi}{dx''}+\varkappa'\frac{d\varphi}{dx''}}.$$

XCI. Soit $F=0$ l'équation rendue homogène d'une ligne de degré m, et $\varphi=0$ l'équation rendue homogène d'une ligne de degré n; si $\frac{x'}{z'}$, $\frac{y'}{z'}$ sont deux coordonnées de la première ligne, alors $x\frac{d\varphi}{dx'}+y\frac{d\varphi}{dy'}+z\frac{dx}{dy'}=0$ (1) est l'équation d'une droite dont on trouve l'enveloppe d'après les principes connus, et cette équation est au plus du degré $m(n-1)(m+n-3)$; dans le cas de $n=2$, cette enveloppe devient une polaire réciproque. Construisons la courbe représentée par l'équation $z'^n\varphi(x,y,z,)-z^n\varphi(x',y',z')=0$; cette courbe passe par le point (x',y',z'), et la tangente à cette courbe passant par ce point est :

$$z'\left[x\frac{d\varphi}{dx'}+y\frac{d\varphi}{dz'}+z\frac{d\varphi}{dz'}\right]-n\varphi(x',y',z')=0;$$

cette tangente est donc parallèle à la droite mobile (1).

Substituant ces valeurs dans l'équation de la courbe donnée, on a une équation aux différences partielles du premier ordre et de degré m, dont l'équation de la polaire réciproque représente l'intégrale ; ainsi les polaires réciproques peuvent servir à trouver l'intégrale des équations aux différences partielles à trois variables, homogènes par rapport aux coefficients différentiels.

LXXXIX. *Problème.* Connaissant l'équation *enveloppe* d'une ligne, trouver l'équation aux coordonnées ordinaires de la polaire réciproque et ensuite de la ligne donnée.

Solution. Soit $F(p, q) = 0$ (p. 9) l'équation *enveloppe* de la courbe donnée ; $\varphi = 0$ l'équation de la directrice et $\psi = 0$ l'équation de la polaire réciproque, soit x'', y'' un point de cette polaire, l'équation de la polaire de ce point est :

$$x\frac{d\varphi}{dx''}+y\frac{d\varphi}{dy''}+z\frac{d\varphi}{dz''}=0.$$

Cette droite par son mouvement décrit la courbe donnée ; donc

$$p=-\frac{\frac{d\varphi}{dx''}}{\frac{d\varphi}{dz''}};\quad q=-\frac{\frac{d\varphi}{dy''}}{\frac{d\varphi}{dz''}}.$$

Ainsi, effaçant les accents, l'équation de la polaire réciproque est en coordonnée ordinaire :

$$F\left(-\frac{\frac{d\varphi}{dx''}}{\frac{d\varphi}{dz''}},\ -\frac{\frac{d\varphi}{dy''}}{\frac{d\varphi}{dz''}}\right)=0;$$

et cherchant ensuite la polaire réciproque de celle-ci, on obtient l'équation des coordonnées ordinaires de la ligne donnée.

Application. 1° *Équation enveloppe.*

$$p^2+q^2-2pq\cos\gamma=a^2p^2q^2;$$

c'est l'enveloppe d'une droite de longueur constante a inscrite dans un angle γ.

Soit
$$\varphi=x^2+y^2-r^2z^2=0;$$
$$\frac{d\varphi}{dx}=2x;\ \frac{d\varphi}{dy}=2y;\ \frac{d\varphi}{dz}=-2r^2z.$$

$p=\frac{x}{r^2z}$; $q=\frac{y}{r^2z}$ et l'équation de la polaire réciproque est : $r^4z^2(x^2+y^2-2xy\cos\gamma)=a^4x^2y^2$, où l'on peut faire $z=1$.

2° *Équation enveloppe.*

$$a^2q^2+b^2p^2=c^4p^2q^2;\quad c^2=a^2-b^2;$$

c'est l'équation *enveloppe* de la développée de l'ellipse

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2z^2 \text{ (axes rectangulaires)};$$

soit $\varphi=a^2y^2+b^2x^2-a^2b^2z^2=0$; $\frac{d\varphi}{dx}=2b^2x$; $\frac{d\varphi}{dy}=2a^2y$; $\frac{d\varphi}{dz}=-2a^2b^2z$; $p=\frac{-x}{a^2z}$; $q=\frac{-y}{b^2z}$; il vient pour équation de la polaire réciproque : $z^2(a^6y^2+b^6x^2)=c^4x^2y^2$, qui appartient aussi à l'hyperbole $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$, mais alors $c^2=a^2+b^2$.

Prenons $\varphi=x^2+y^2-r^2z^2=0$; il vient :

$$r^4z^2(a^2y^2+b^2x^2)=c^4x^2y^2;\quad \text{faisant } z=1,\ r=c,$$

on a :
$$\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}=1.$$

XC. *Coniques confocales.* Une conique ayant pour directrice un cercle confocal, a un second cercle pour polaire réciproque ; à l'aide de ce théorème (*V.* p. 413), une foule de problèmes sur les coniques peuvent se ramener à d'autres problèmes sur le cercle.

S'il s'agit, par exemple, d'inscrire dans une conique un polygone circonscrit à un polygone donné, ou bien de circonscrire à une conique un polygone inscrit dans un polygone donné, il suffira de savoir résoudre ce genre de questions pour le cercle; de même étant données deux coniques, ayant un foyer en commun, les recherches des points d'intersection de ces coniques, ou des tangentes communes, n'exigent que les solutions des mêmes questions pour deux cercles. On sait, depuis Newton, que la construction du cercle tangent à trois cercles, s'effectue par l'intersection de deux coniques confocales; intersection qu'on obtient géométriquement, sans avoir besoin de décrire les coniques, en menant des tangentes communes à deux cercles.

XCI. *Méthode des homogènes;* application aux lignes du troisième degré. Soit $F=0$ l'équation rendue homogène de la ligne donnée, $\varphi=0$ l'équation également homogène de la conique directrice (LXXXIV), soit x', y', z' les coordonnées d'un point de la polaire réciproque, on a (LXXXV) :

$$x' = \lambda \frac{dF}{dx} - \nu \frac{dF}{dy} + \varkappa \frac{dF}{dz},$$
$$y' = -\nu \frac{dF}{dx} - \lambda' \frac{dF}{dx} + \nu' \frac{dF}{dz},$$
$$z' = \varkappa \frac{dF}{dx} + \varkappa' \frac{dF}{dy} + \mu \frac{dF}{dz}.$$

On en déduit linéairement :

$$2\Lambda \frac{dF}{dx} = 2\gamma x' - \beta y' + \varepsilon z',$$
$$2\Lambda \frac{dF}{dy} = -\beta x' + 2\alpha y' + \delta z',$$
$$2\Lambda \frac{dF}{dz} = \varepsilon x' + \delta y' + 2\zeta z'.$$

Posons

$$\frac{dF}{dx}+px_1=0;\quad \frac{dF}{dy}+py_1=0;\quad \frac{dF}{dz}+pz_1=0. \qquad (1)$$

x_1, y_1, z_1 sont des fonctions linéaires en x', y', z'; on déduit de ces trois équations, par le théorème des homogènes :

$$xx_1+yy_1+zz_1=0. \qquad (2)$$

Éliminant x, y, z, p, entre deux des équations (1), l'équation (2) et $F=0$. On aura une équation entre x_1, y_1, z_1, et par conséquent entre x', y', z'.

Nous allons suivre pour l'équation du troisième degré la marche de M. Arthur Cayley (*the Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. Ier, p. 97, 1846, deuxième série).

Soit $\quad F=3U=ax^3+by^3+cz^3+3iy^2z+$
$$+3jz^2x+3kx^2y+3i_1yz^2+3j_1zx^2+3k_1xy^2+6lxyz=0,$$

l'équation (2) fournit : $\quad x^2x_1+xyy_1+xzz_1=0;$
$$xyx_1+y^2y_1+yzz_1=0;\ xzx_1+yzy_1+z^2zy_1=0.$$

Ces trois équations sont homogènes et du second degré en x, y, z; de même les équations (1).

Si l'on avait encore une équation $\Phi=0$ de ce genre, on pourrait éliminer *linéairement* de ces sept équations les sept quantités $x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz, p$.

Voici comment l'auteur se procure cette septième équation.

Faisons

$$\frac{d^2U}{dx^2}=2L;\quad \frac{d^2U}{dydx}=2T;\quad \frac{d^2U}{dxdz}=2S,$$
$$\frac{d^2U}{dy^2}=2M;\quad \frac{d^2U}{dydz}=2R,$$
$$\frac{d^2U}{dz^2}=2N.$$

L, M, O, R, S, T sont homogènes du 1er degré en y, x, z.

Les équations (1) donnent, d'après le principe des homogènes :

$$Lx + Ty + Sz + px_1 = 0,$$
$$Tx + My + Rz + py_1 = 0,$$
$$Sx + Ry + Nz + pz_1 = 0.$$

Au moyen de ces équations et de l'équation (2), on peut éliminer linéairement x, y, z, p, et l'on obtient une équation homogène du 2^{me} degré; car les termes tels que LMN du 3^{me} degré se trouvent au dénominateur dans les valeurs de x, y et z, et s'en vont; ces valeurs étant substituées dans l'équation (2), on a la fonction cramérienne :

$$\Phi = -\left\{\begin{matrix} L, T, S, x_1, \\ T, M, R, y_1, \\ S, R, N, z_1, \\ x_1, y_1, z_1, \end{matrix}\right\} = 0,$$

fonction qui a cette forme :

$$\Phi = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Fyz + 2Gxz + 2Hxy = 0.$$

On trouve dans le mémoire cité les valeurs des six quantités A, B, C, F, G, H calculées en fonction des coefficients de l'équation $U = 0$ et x_1, y_1, z_1; ensuite, on effectue l'élimination ci-dessus indiquée, et l'on arrive à une équation du 6^{me} degré en x_1, y_1, z_1, équation qui occupant trois pages et demie in-8°, nous ne pouvons pas la transcrire; mais il est utile de savoir que ce résultat existe tout calculé; il peut servir à vérifier des cas particuliers. On voit *à priori* que cette équation ordonnée par rapport à y_1, x_1, z_1, contient 28 termes polynômes, mais il suffit d'en calculer 7; les 21 autres s'en déduisent par de simples mutations de lettres.