POUDRA

Théorème de minimum dans le triangle plan

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 407-409

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__407_1>

THÉORÈME DE MINIMUM

dans le triangle plan.

PAR M. POUDRA,
Chef d'escadron d'état-major.

1. *Théorème.* Si par chaque angle d'un triangle, on mène une droite qui coupe le côté opposé en deux segments proportionnels aux carrés des côtés adjacents, les trois droites se coupent en un point tel que la somme des carrés des distances de ce point aux côtés du triangle est un minimum, relativement à la même somme pour d'autres points de l'espace.

Démonstration. Il suffit évidemment de considérer les points situés dans le plan du triangle (*).

Soit ABC le triangle et O le point qui remplit la condition du minimum, et soient OA′, OB′, OC′ les perpendiculaires abaissées de O sur les côtés BC, AC, AB; menons les droites A′B′, B′C′, C′A′, OA′, OB′, OC′; si l'on cherche un point tel que la somme des carrés de ses distances aux *angles* du triangle A′B′C′ soit un minimum, il est évident que le point

(*) On est prié de faire la figure.

O remplit encore cette condition-là. Donc, d'après un théorème connu, O est le centre de gravité du triangle $A'B'C'$; donc les trois triangles $OA'B'$, $OA'C'$, $OB'C'$ sont équivalents, et l'on a successivement :

$$OB'.OA'.\sin C = OA'.OC'.\sin B\,;\ \frac{OB'}{OC'} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{AC}{AB}.$$

Dans le triangle rectangle, le point cherché est au milieu de la hauteur.

Prolongeons la droite jusqu'à ce qu'elle se rencontre avec BC en M et abaissons de M la perpendiculaire MB'' sur AC et MC'' sur AB, l'on a :

$$\frac{MB''}{MC''} = \frac{OB'}{OC'} = \frac{AC}{AB} = \frac{MC \sin C}{MB.\sin B} = \frac{MC.AB}{MB.AC};$$

d'où
$$\frac{MC}{MB} = \frac{AC^2}{AB^2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

II. Note. *Solution générale analytique.*

Soit un système quelconque de n droites situées dans le même plan ; prenons des axes rectangulaires.

Soit $d_p y + e_p x + f_p = 0$ l'équation d'une quelconque de ces n droites ; donnant à l'indice p successivement les valeurs 1. 2. 3...... n, on aura les équations des n droites, et soit encore α_p l'angle qui forme la droite d'indice p avec l'axe des x : Y, X étant les coordonnées d'un point quelconque du plan, sa distance à la droite d'indice p est :

$$Y\cos\alpha_p - X\sin\alpha_p + \frac{f_p \cos\alpha_p}{d_p}.$$

Si on élève cette expression à la puissance m et qu'on donne à p toutes les valeurs 1, 2..... n, on aura les sommes des puissances d'ordre m de toutes les distances du point (X, Y) au système de droites. Si cette somme est une quantité constante, le lieu du point m est une ligne d'ordre m, qui ne peut admettre des asymptotes rectilignes que lorsque

m est impair. Si l'on veut que cette somme soit un minimum, il faut égaler à zéro la dérivée par rapport à Y et la dérivée par rapport à X, et les points cherchés sont donnés par l'intersection de deux lignes d'ordre $m-1$; il y a donc généralement $(m-1)^2$ points qui répondent à la question. Il est d'ailleurs évident que pour qu'il y ait un minimum *fini*, il faut que m soit pair. Faisons $m=2$; alors pour une constante donnée le lieu est une ellipse, car le B^2-4AC y est une somme de carrés négatifs. Les coordonnées du centre sont indépendantes de la constante ; donc ce centre est fixe et il est le point qui répond au *minimum* ; car, en ce cas, l'ellipse se réduit à un point.

Soit $Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$, l'équation de l'ellipse ; où $A=\Sigma_1^n\cos^2\alpha_p$; $B=-2\Sigma_1^n\sin\alpha_p\cos\alpha_p$; $C=\Sigma_1^n\sin^2\alpha_p$.

$D=\Sigma_1^n\dfrac{f_p}{d_p}\cos^2\alpha_p$; $E=-\Sigma_1^n\dfrac{f_p}{d_p}\sin\alpha_p\cos\alpha_p$ et F est la constante prise négativement. Lorsque l'ellipse se réduit à son centre l'on a $AE^2-BDC+CD^2+F(B^2-4AC)=0$; ce qui donne la valeur F de la constante dans le cas du minimum.

III. Les mêmes raisonnements ont lieu pour un système de plans ; car la distance d'un point à un plan est aussi une fonction linéaire des coordonnées de ce point.

IV. Dans le triangle ABC, le carré de la distance du point cherché au sommet A est $\dfrac{c^2b^2[b^2+c^2+2bc\cos A]}{(a^2+b^2+c^2)^2}$.