Nouvelles annales de mathématiques

Terquem

Théorèmes de M. Strebor sur un triangle formé par trois arcs d'hyperboles équilatères concentriques ou par des paraboles confocales

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 397-400

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__397_1>

THÉORÈMES DE M. STREBOR

Sur un triangle formé par trois arcs d'hyperboles équilatères concentriques ou par des paraboles confocales.

—

I. *Lemme.* Deux hyperboles concentriques se coupent orthogonalement lorsque les axes principaux de l'une sont les asymptotes de l'autre, et *vice versâ.*

II. *Lemme.* Deux hyperboles équilatères concentriques étant donnés par les deux équations

$$y^2 + B_1xy - x^2 + F_1 = 1\,; \quad y^2 + B_2xy - x^2 + F_2 = 0$$

(les axes étant nécessairement rectangulaires), si l'on a $B_1B_2+4=0$, les hyperboles se coupent orthogonalement, et *vice versâ.*

Observation. Si $B_1 = 0$, alors $B_2 = \infty$; la première hyperbole étant alors rapportée à ses axes principaux, la seconde doit avoir ces axes pour asymptotes et prendre la forme Bxy

$+F=0$; ce qu'on obtient en remplaçant B_1 et F_1 par $\frac{B}{q}$, $\frac{F}{q}$ et faisant ensuite $q=0$.

III. *Théorème.* Etant donné un triangle plan formé par trois arcs d'hyperboles équilatères concentriques, si par chaque sommet ou fait passer une hyperbole équilatère concentrique aux hyperboles données, et respectivement perpendiculaire au côté opposé, les trois hyperboles qu'on obtient ainsi vont concourir au même point (Strebor).

Démonstration. Soient

$$y^2+B_1xy-x^2+F_1=0;\quad y^2+B_2xy-x^2+F_2=0;$$
$$y^2+B_3xy-x^2+F_3=0,$$

les équations des trois hyperboles concentriques données; l'hyperbole équilatère, passant par l'intersection des deux premières et aussi concentrique, a une équation de cette forme:

$$y^2+\frac{pB_1+B_2}{p+1}xy-x^2+\frac{pF_1+F_2}{p+1}=0 \ (1),$$

p étant un multiplicateur quelconque. Pour que cette courbe coupe orthogonalement la troisième hyperbole, l'on doit avoir (*Lemme* (1) $\frac{pB_1+B_2}{p+1}.B_3+4=0$. Éliminant p, l'équation (1) prend la forme

$$B_3(B_1-B_2)y^2-4(B_1-B_2)xy-(B_3B_1-B_2)x^2+F_2(B_1B_3$$
$$+4)-F_1(B_2B_3+4)=0.$$

Les deux autres hyperboles ont pour équations :

$$B_1(B_2-B_3)y^2-4(B_2-B_3)xy-B_1(B_2-B_3)x^2+F_3$$
$$(B_2B_1+4)-F_2(B_3B_1+4)=0$$
$$B_2(B_3-B_1)y^2-4(B_3-B_1)xy-B_2(B_3-B_1)x^2+F_1$$
$$(B_3B_2+4)-F_3(B_1B_2+4)=0.$$

Or, une quelconque de ces équations est la différence des deux autres; donc les trois hyperboles passent par les deux mêmes points. C. Q. F. D.

Observation. Lorsque deux courbes *concentriques* se coupent, les points d'intersection sont toujours en nombre pair, et symétriquement placés par rapport au centre.

IV. La méthode projective orthogonale fournit le théorème général suivant : étant donné un triangle plan formé par trois arcs d'hyperboles concentriques, et dont les asymptotes sont *conjuguées* respectivement par rapport à une ellipse quelconque tracée dans le même plan, si par chaque sommet l'on mène une hyperbole concentrique aux précédentes, et telle qu'elle coupe le côté opposé en un point où les deux tangentes soient *conjuguées* par rapport à cette même ellipse, les trois hyperboles passent par les deux mêmes points.

V. La *méthode* des polaires réciproques mène à d'autres théorèmes.

Lemme. I. La polaire réciproque d'une hyperbole équilatère relativement à un cercle concentrique pris pour ligne directrice, est une hyperbole équilatère concentrique semblablement placée.

Lemme. II. Deux hyperboles équilatères concentriques ont en commun des tangentes parallèles.

Lemme. III. Les polaires réciproques de deux hyperboles équilatères concentriques et orthogonales relativement au même cercle concentrique, sont deux hyperboles équilatères concentriques se coupant aussi à angle droit.

Théorème. Étant données trois hyperboles équilatères concentriques, si l'on mène une des tangentes communes respectivement à la première et à la deuxième, à la deuxième et à la troisième, à la troisième et à la première ; si l'on mène une hyperbole équilatérale concentrique touchant la première tangente et perpendiculaire à la troisième hyperbole, et de même pour les deux autres tangentes, les trois hyperboles auront une tangente en commun.

VI. Les hyperboles équilatères données par les équations

$$y^2 + B_1xy - x^2 + F_1 = 0; \quad y^2 + B_2xy - x^2 + F_2 = 0$$

se coupent sous un angle dont la tangente est égale à $\frac{2(B_1 - B_2)}{B_1B_2 + 4}$; donc les polaires réciproques par rapport à un cercle directeur concentrique se coupent sous le même angle.

VII. Un théorème analogue au premier a lieu pour les arcs d'hyperboles équilatères bissectrices des angles du triangle donné. (Strebor.)

VIII. Deux théorèmes semblables aux précédents existent encore en considérant au lieu d'hyperboles équilatères concentriques des paraboles confocales. (Strebor.)

Observation. VII et VIII restent à démontrer.