E. CATALAN

Sur les normales aux coniques

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 396-397
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__396_0>

SUR LES NORMALES AUX CONIQUES.

PAR E. CATALAN.

—

(*Rectification.*)

Une grave erreur de calcul s'est glissée dans l'article *Sur les normales aux coniques*, inséré dans le dernier numéro des *Annales* (p. 337). La fin de cet article doit être modifiée ainsi qu'il suit :

9. Si l'équation (12) a ses trois racines réelles, l'équation (10) représentera trois couples de droites. Nous allons voir que, dans la même circonstance, il y aura quatre normales passant par le point donné ; et, conséquemment, que les trois couples de droites formeront un quadrilatère complet avec ses deux diagonales ; etc.

10. La condition de réalité des trois racines de l'équation (12) est :

$$(a^2p^2 + b^2q^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4p^2q^2 < 0. \qquad (13)$$

Pour simplifier cette inégalité, posons :

$$\frac{ap}{c^2} = r^{\frac{3}{2}}, \quad \frac{bq}{c^2} = s^{\frac{3}{2}} \text{ (*)};$$

p et q peuvent être supposées positives ; donc r et s le seront pareillement.

L'inégalité (13) devient d'abord

$$(r^3 + s^3 - 1)^3 + 27r^3s^3 < 0 ;$$

d'où

$$r^3 + s^3 - 1 + 3rs < 0.$$

(*) J'emprunte cette transformation à un très-intéressant travail de M. Gerono, inséré dans le second volume de ce recueil.

On reconnaît facilement que le premier membre est divisible par $r+s-1$, et que le quotient peut se mettre sous la forme

$$(r-s)^2+(r+1)(s+1).$$

Ce quotient est donc positif; et l'inégalité précédente se réduit à $r+s-1<0$, ou

$$(ap)^{\frac{2}{3}}+(bq)^{\frac{2}{3}}<c^{\frac{4}{3}}.$$

Celle-ci exprime que le point (p,q) est intérieur à la développée de l'ellipse, et, conséquemment, qu'il y aura quatre normales passant par ce point : la condition (13) exprime donc la même chose.

11. Remarquons en terminant que ce qui précède donne le moyen de ramener la résolution de l'équation du quatrième degré à celle d'une équation du troisième.