NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEBESGUE

Théorème de Newton sur les asymptotes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 385-390

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__385_1>

THÉORÈME DE NEWTON SUR LES ASYMPTOTES.

PAR M. LEBESGUE.

J'ajouterai d'abord un mot à ce que M. Terquem a dit dans les *Nouv. ann.*, t. IV, p. 14, sur les diamètres des courbes algébriques.

Soit $Q_i y^{n-i}+Q_{i+1}y^{n-i-1}+\ldots Q_n=0$, l'équation d'une courbe algébrique de degré n; Q_i, $Q_{i+1}\ldots Q_n$ sont des fonctions entières de x dont l'une au moins sera d'un degré marqué par l'indice, le degré ne pouvant jamais surpasser cet indice. La ligne des ordonnées moyennes sera donc :

$$(n-i)yQ_i+Q_{i+1}=0.$$

Ce sera généralement une courbe facile à construire, car elle est du premier degré y et au plus du degré $i+1$ en x; mais si $Q_{i+1}=(ax+b)Q_i$, on a :

$$(n-i)y+ax+b=0,$$

ligne droite qui prend le nom de diamètre.

Si $i=0$, Q_0 est une constante. $Q_1=mx+n$, la ligne des ordonnées moyennes, est toujours une ligne droite; c'est le diamètre ordinaire. Si $i>0$, le diamètre sera dit *singulier*. Ces sortes de diamètres, dont Waring a parlé, sont toujours en nombre n ou inférieurs à n.

On voit de plus qu'en prenant un tel diamètre pour axe des x, l'équation prend la forme

$$Q_i y^{n-i}+Q_{i+2}y^{n-i-2}+\ldots=0.$$

Une équation étant donnée, on voit de suite si la ligne des ordonnées moyennes, ou celle des abscisses moyennes, peut être un diamètre ordinaire ou singulier. Cherchons si, en prenant $y=px$ pour axe d'un nouvel axe des abscisses x', la ligne des abscisses ne serait pas un diamètre ordinaire ou singulier.

$$\text{Soit } x^n F\left(\frac{y}{x}\right)+x^{n-1}f\left(\frac{y}{x}\right)+x^{n-2}\varphi\left(\frac{y}{x}\right)\ldots=0 \qquad (a)$$

l'équation d'une courbe rapportée à des axes faisant l'angle θ. Si l'axe des y restant le même, l'axe x' a pour équation $y=px$, on transformera l'équation en posant $y=px+y'$, $x'=x\sqrt{1+p^2+2p\cos\theta}=Px$; et comme $\frac{y}{x}=p+\frac{y'}{x}$, en substituant et ordonnant par rapport à x, puis remplaçant x par $\frac{x'}{\mathrm{P}}$ on trouvera :

$$x'^n\mathrm{F}p+\mathrm{P}x'^{n-1}(y'\mathrm{F}'p+fp)+\ldots\ldots=0\,; \qquad (b)$$

de là on tire un diamètre ordinaire :

$$nx'\mathrm{F}p+\mathrm{P}(y'\mathrm{F}'p+fp)=0,$$

ou relativement aux axes primitifs :

$$y\mathrm{F}'p+(n\mathrm{F}p-p\mathrm{F}'p)x+fp=0.$$

Le diamètre ne pourrait être singulier qu'en faisant disparaître le terme x'^n ou en posant :

$$\mathrm{F}p=\mathrm{A}p^n+\mathrm{A}_1f^{n-1}+\ldots\mathrm{A}_n=0.$$

Si $$\mathrm{P}\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^n}(\mathrm{A}y^n+\mathrm{A}_1y^{n-1}x+\ldots+\mathrm{A}_nx^n),$$

d'où l'on parvient facilement à cette conclusion, il y a au plus n diamètres singuliers; il serait, je crois, superflu de la développer.

De ce que $\mathrm{F}p=0$, on n'en peut conclure l'existence d'un diamètre singulier correspondant à la droite $y=px$, que si la condition de divisibilité donnée plus haut est satisfaite; seulement dans tous les cas l'équation (b) montre que les droites d'équation $y=px+y'$ parallèles, mais variables avec y', ne peuvent rencontrer la courbe en plus de $n-1$ points. Par cette raison on peut regarder ces sécantes comme *singulières*, en nommant *ordinaires* celles pour lesquelles on n'a pas $\mathrm{F}p=0$, auquel cas il peut y avoir n points d'intersection.

Parmi les sécantes singulières données par l'équation $y=px+y'$ sous la condition $\mathrm{F}p=0$, il faut remarquer celle pour laquelle y' serait déterminé par l'équation

$$y'\mathrm{F}'p+fp=0\,;$$

l'équation (b) montrerait alors que les lignes droites d'équation

$$y=px-\frac{fp}{F'p}\,;\quad (Fp=0) \tag{c}$$

ne peuvent rencontrer la courbe en plus de $n-2$ points.

Examinons de plus près ces sécantes *singulières*. Quand l'équation (b) est mise sous la forme

$$Q_1x^{n-1}+Q_2x'^{n-2}+\ldots+Q_n=0, \tag{d}$$

s'il arrive que la valeur de y' qui donne $Q_1=0$ donne aussi $Q_2=Q_3\ldots=Q_n=0$, l'équation (d) sera décomposable, et la droite (c) sera au nombre des lignes représentées par l'équation donnée. Ce cas étant laissé de côté, si on donne à y' non plus une valeur qui rende $Q_1=0$, mais Q_1 fort petit, l'équation

$$x'^{n-1}+\frac{Q_2}{Q_1}x'^{n-2}+\ldots=0$$

aurait nécessairement des racines fort grandes approchant de plus en plus de l'infini. Deux cas peuvent se présenter (il serait peu utile de donner ici des exemples, chose déjà faite dans ce recueil) : si parmi ces racines infinies il y en a de réelles, la ligne (c) sera dite *asymptote vraie;* mais si ces racines infinies étaient imaginaires, la ligne (c) ne serait plus une asymptote, autrement ce serait une *asymptote fausse*. Newton a donné un théorème général sur les courbes algébriques, et qui s'étend aux asymptotes tant vraies que fausses.

En voici l'énoncé : si une courbe du n^e degré ayant n asymptotes est coupée par une sécante, savoir les asymptotes aux points a_1, $a_2\ldots a_n$, les branches correspondantes de la courbe aux points b_1, $b_2\ldots b_n$, la somme des segments a_1b_1, $a_2b_2\ldots\ldots a_nb_n$ sera nulle, c'est-à-dire que la somme des segments positifs étant S, celle des segments négatifs sera —S. Ainsi pour l'hyperbole conique on a deux segments égaux en valeur absolue.

La démonstration s'établit en quelques mots, au moyen d'un théorème de M. Liouville. Si l'on a pris l'axe des y parallèle à la sécante, les asymptotes seront données par l'équation

$$y=px-\frac{fp}{F'p}$$

en supposant

$$Fp=Ap^{n-1}+A_1p^{n-1}+\ldots+A_n=0.$$
$$fp=Bp^{n-1}+B_1p^{n-2}+\ldots+B_{n-1}.$$

soient $p_1p_2\ldots p_n$ les n racines inégales et réelles de l'équation $Fp=0$ (nous laisserons de côté pour abréger le cas des racines égales, quand dans ce cas il y a néammoins n asymptotes, ce qui exige des équations de condition), on aura $p_1+p_2+\ldots+p^u=-\frac{A_1}{A}$.

Soient $Y_1, Y_2 \ldots Y_n$ les n ordonnées aux asymptotes pour une abscisse donnée x, il viendra :

$$Y_1+Y_2+\ldots+Y_n=(p_1+p_2+\ldots+p_n)x-\left\{\frac{fp'}{F'p}+\frac{fp_2}{F'p_2}+\ldots+\frac{fp_n}{F'p_n}\right\}$$

ou encore :

$$\Sigma_1^nY=x\Sigma_1^np-\Sigma_1^n\frac{fp}{F'p}.$$

Or $\Sigma_1^np=-\frac{A_1}{A}$, et comme on l'a vu dans ces Annales, t. VI, p. 128, ligne 12[e],

$$\Sigma_1^n\frac{fp}{F'p}=\frac{B}{A}$$

(en changeant convenablement la notation et corrigeant une faute de copie qui vient de ce que

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=-\frac{A_1}{A}-\alpha\frac{B}{A}$$

et non $-\frac{A'}{A}-\alpha B$).

On a donc $\Sigma Y = -\frac{A_1 x + B}{A}$.

Or si pour la même abscisse x, les ordonnées à la courbe sont $y_1, y_2 \ldots y_n$, on a $y_1 + y_2 \ldots + y_n = \Sigma y = -\frac{A_1 x + B}{A}$, donc

$$\Sigma_1^n Y = \Sigma_1^n y \quad \text{ou} \quad \Sigma_1^n (Y - y) = 0,$$

ce qui est précisément le théorème de Newton.

En voici une conséquence pour le troisième degré. Si deux segments sont nuls, le troisième sera aussi nul, d'où ce théorème.

Quand une courbe du troisième degré rencontre ses trois asymptotes en trois points, ces points sont en ligne droite. S'il n'y a que deux points d'intersection, ils sont sur une parallèle à l'une des asymptotes. Cela suit d'ailleurs de la forme réduite de l'équation des courbes du troisième degré, à trois asymptotes.