NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LEBESGUE

# Résolution en nombres entiers de l'équation $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 7 (1848), p. 37-39

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__37_0>

# RÉSOLUTION EN NOMBRES ENTIERS

## *de l'équation* $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$.

PAR M. LEBESGUE.

Un facteur carrés commun à trois des termes $x^2$, $y^2$, $z^2$, $t^2$ de l'équation

$$x^2 + y^2 = z^2 + t^2, \qquad (a)$$

doit disparaître par la division; cela fait, on reconnait de suite que des quatre nombres $x$, $y$, $z$, $t$, il y en a deux pairs, quand ils ne sont pas tous impairs; on pourra donc poser, $v$, $q$, $r$, $s$ étant des nombres entiers positifs ou négatifs :

$$\left.\begin{aligned} x+y+z+t &= 2p \\ x+y-z-t &= 2q \\ x-y+z-t &= 2r \\ -x+y+z-t &= 2s \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} 2x &= p+q+r-s \\ 2y &= p+q-r+s \\ 2z &= p-q+r+s \\ 2t &= p-q-r-s \end{aligned}\right.$$

La substitution dans l'équation $(a)$ donne

$$pq = rs;$$

de là $s = \frac{pq}{r}$.

Comme $s$ doit être entier, si R est le plus grand commun diviseur de $p$ et $r$, et qu'on ait $p = \mathrm{PR}$, $r = \mathrm{R}\rho$, il en résultera $s = \frac{\mathrm{P}q}{\rho}$; et comme P, $\rho$ sont premiers entre eux, il faudra poser $q = \mathrm{Q}\rho$, d'où $s = \mathrm{PQ}$.

Ainsi on aura, en substituant pour $p$, $q$, $r$, $s$, leurs valeurs PR, $\mathrm{Q}\rho$, $\mathrm{R}\rho$, PQ :

$$2x = P(R-Q) + \rho(R+Q),\ \ 2y = P(R+Q) - \rho(R-Q)$$
$$2t = P(R-Q) - \rho(R+Q),\ \ 2z = P(R+Q) + \rho(R-Q).$$

On tire de là

$$2(x^2+y^2) = (P^2+\rho^2)(Q^2+R^2).$$

Pour que le second membre soit divisible par 2, il faut que dans un au moins des facteurs binômes $P^2+\rho^2$, $Q^2+R^2$, les deux termes soient tous deux pairs ou tous deux impairs. Si le binôme $P^2+\rho^2$ remplit cette condition, en vertu de

$$\frac{P^2+\rho^2}{2} = \left(\frac{P+\rho}{2}\right)^2 + \left(\frac{P-\rho}{2}\right)^2 = Q_1^2+R_1^2,$$

il viendra

$$x^2+y^2 = (Q_1^2+R_1^2)(Q^2+R^2).$$

Ainsi $x^2+y^2 = z^2+t^2 = A$ est un nombre composé.

Si cependant on avait $R_1 = 0$, $Q_1 = 1$, ce qui suppose $P = \rho = 1$, on n'aurait plus que

$$x^2+y^2 = Q^2+R^2,$$

qui peut être premier, mais alors

$$x = R,\ y = Q,\ z = R,\ t = -Q;$$

on n'a plus réellement qu'une seule décomposition de A en deux carrés.

*Théorème.* Tout nombre A qui peut être mis de deux manières sous la forme $f^2+g^2$ est nécessairement non premier.

*Remarque.* Tout nombre qui ne peut être mis qu'une seule fois sous la forme $f^2+g^2$ est premier. La démonstration présente plus de difficulté.

*Problème.* Résoudre l'équation $x^2+y^2 = z^2$.

On fera $t = 0$; de là, $P(R-Q) = \rho(P+Q)$, l'élimination de $\rho$ conduit à la solution

$$(R^2-Q^2)^2 + (2QR)^2 = (R^2+Q^2)^2.$$

Il suffit d'omettre un facteur commun aux nombres $x$, $y$, $z$.

*Problème.* Résoudre $x^2+y^2=2z^2$?

Il faut poser $z=t$, de là, $R\rho+PQ=0$; en éliminant $\rho$ et omettant un facteur commun, on trouve

$$x=R^2-2QR-Q^2,$$
$$y=R^2+2QR-Q^2,$$
$$z=R^2+Q^2.$$

*Problème.* Résoudre $x^2+y^2=2(z^2+t^2)$.

Comme $x$ et $y$ doivent être tous deux pairs ou tous deux impairs, on aura

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2+\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=z^2+t^2.$$

On est ramené au premier problème.

*Problème.* Résoudre l'équation $x^2+y^2+z^2=t^2$ en nombres entiers.