NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LENTHÉRIC

Théorie générale des pôles, polaires, etc.

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 373-385

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__373_0>

THÉORIE GÉNÉRALE DES POLES, POLAIRES, etc.

(V. p. 325, fin.)

PAR M. LENTHÉRIC NEVEU,
Professeur.

—

§ II.

1. Soit

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+Byz+B'xz+B''xy+Cx+C'y+C''z+E=0$$

Ou plus simplement $F(x,y,z)=0$ (1), l'equation générale des surfaces du 2^e^ ordre.

On sait que lorsqu'on mène à la surface un plan tangent par un point quelconque $\alpha.\beta.\gamma$ de l'espace, les coordonnées du point de contact satisfont aux deux équations

$$F(x.y.z)=0;\ F'_x(\alpha-x)+F'_y(\beta-y)+F'_z(\gamma-z)=0$$

La seconde ajoutée au double de la première s'abaisse au premier degré et devient

$$\alpha F'_x+\beta F'_y+\gamma F'_z+Cx+C'y+C''z+2E=0 \qquad (2)$$

équation d'un plan ; donc tous les points de contact sont dans ce plan. Ainsi, *une surface conique circonscrite à une surface du* deuxième *ordre touche cette surface suivant une courbe plane.*

Nous désignerons le plan de cette courbe sous le nom de *plan de contact.* Cela posé, si le sommet $\alpha.\beta.\gamma$ de la surface conique circonscrite se meut sur un plan quelconque

$$z=px+qy+r \ (3$$

on aura entre α. β. γ la relation $\gamma = p\alpha + q\beta + r$ et par suite l'équation (2) deviendra

$$(F'_x + pF'_z)\alpha + (F'_y + qF'_z)\beta + rF'_z + Cx + C'y + C''z + 2E = 0 \quad (4)$$

et sera l'équation générale de tous les plans de contact qui correspondent aux divers points du plan (3).

Or, la forme seule de l'équation (4) montre que tous les plans qu'elle représente en y faisant varier α. β coupent la droite fixe

$$F'_x + pF'_z = 0\,; \quad F'_y + qF'_z = 0$$

en un même point donné par l'intersection des trois plans

$$F'_x + pF'_z = 0 \ (5)\,; \quad F'_y + qF'_z = 0 \qquad (6)$$
$$rF'_z + Cx + C'y + C''z + 2E = 0 \qquad (7)$$

dont les équations ne contiennent pas les variables α. β ; donc tous les plans de contact se coupent en un même point situé sur la droite (5), (6). Cette droite est évidemment un diamètre de la surface, car les équations sont satisfaites par $F'_x = 0$, $F'_y = 0$, $F'_z = 0$ qui déterminent les coordonnées du centre. La position de ce diamètre est aussi indiquée par la forme des équations (5), (6).

En effet l'équation d'un plan tangent à la surface et parallèle au plan (3) est $z - z' = p(x - x') + q(y - y')$ x'. y'. z' désignant les coordonnées du point de contact, et l'on doit avoir $p = -\frac{F'_{x'}}{F'_{z'}}$ ou $F'_{x'} + pF'_{z'} = 0$ et $q = -\frac{F'_{y'}}{F'_{z'}}$ ou $F'_{y'} + qF'_{z'} = 0$, équations qui sont satisfaites si le point de contact x'. y'. z' est une des extrémités du diamètre (5), (6). Donc ce diamètre est celui qui passe par le point de contact d'un plan tangent à la surface parallèlement au plan donné. Nous pouvons par conséquent en conclure ce théorème :

Si l'on circonscrit à une surface du deuxième ordre une suite de surfaces coniques dont les sommets sont situés sur un mêm plan : 1° toutes les courbes de contact seront des courbes planes ; 2° leurs plans se couperont en un même point ; 3° ce point sera situé sur le diamètre de la surface qui passe par le point de contact d'un plan tangent à la surface et parallèle au plan donné.

Le point de concours de tous les plans de contact qui correspondent aux divers points d'un plan, a été appelé par M. Gergonne le *pôle* du plan, et l'on voit qu'à un plan quelconque correspond toujours un pôle dont les équations (5), (6), (7) déterminent les coordonnées en y remplaçant p, q, r, par les constantes de ce plan.

2. Réciproquement, soient a,b,c les coordonnées d'un point de l'espace, en faisant $x=a$, $y=b$, $z=c$ dans les équations (5), (6), (7), elles donneront $p=-\frac{F'_a}{F'_c}$; $q=-\frac{F'_b}{F'_c}$, $r=-\frac{Ca+C'b+C''c+2E}{F'_c}$, en substituant dans (3) l'équation résultante

$$F'_a x+F'_b y+F'_c z+Ca+C'b+C''c+2E=0 \tag{8}$$

sera celle d'un plan ayant pour pôle le point a,b,c ; d'où résulte ce nouveau théorème :

Si par un point quelconque, on conduit une suite de plans qui coupent une surface du deuxième ordre et que l'on considère les courbes d'intersection comme les lignes de contact d'une suite de surfaces coniques, circonscrites à la surface du deuxième ordre, les sommets de toutes ces surfaces seront dans un même plan, et ce plan sera parallèle à celui qui touche la surface à l'extrémité du diamètre qui passe par le point.

Ce plan est dit le plan *polaire* du point. Ainsi, à un point quelconque de l'espace correspond toujours un plan polaire dont on trouve l'équation en remplaçant dans (8) a, b, c par les coordonnées de ce point.

3. Le plan polaire étant $z = px + qy + r$ (3), nous avons vu que son pôle est déterminé par les trois équations :

$$F'_x + pF'_z = 0 \ (5)\,; \quad F'_y + qF'_z = 0 \qquad (6)$$
$$rF'_z + Cx + C'y + C''z + 2E = 0. \qquad (7)$$

Comme chacune d'elles ne contient que l'une des constantes p, q, r du plan, il en résulte que séparément ou deux à deux ces équations expriment un lieu géométrique des pôles, qui dans le premier cas est un plan et dans le deuxième cas une droite.

r *étant seule constante*, le lieu géométrique des pôles sera le plan (7); or dans cette hypothèse le plan (3) passe constamment par le point fixe $x=0, y=0, z=r$ et l'équation (8) montre que l'équation (7) est celle du plan polaire de ce point fixe; donc

Le lieu géométrique des pôles d'un système de plans qui se coupent au même point est le plan polaire de ce point.

r *étant seule variable*, le lieu géométrique des pôles est la droite (5), (6). Or, dans cette hypothèse le plan (3) se meut parallèlement à lui-même, et nous avons vu que la droite (5), (6) est le diamètre qui passe par le point de contact d'un plan tangent parallèle au plan donné ; donc

Le lieu géométrique des pôles d'un système de plans parallèles est le diamètre passant sur le point de contact du plan tangent parallèle.

p *étant seule constante*, le lieu géométrique des pôles sera le plan (5) ; or, dans cette hypothèse, le plan (3) est parallèle à la droite fixe $y=0$; $z=px$, et le plan diamétral conjugué de cette droite est $\frac{1}{p}F'_x + F_z = 0$ ou $F'_x + pF'_z = 0$, qui est l'équation (5) ; donc

Le lieu géométrique des pôles d'un système de plans parallèles à une droite, est le plan diamétral conjugué de la direction.

p *étant seule variable*, le lieu géométrique des pôles sera la droite (6), (7). Or, dans cette hypothèse, le plan (3) passe constamment par la droite $x=0$, $z=qy+r$ et (6) est le plan diamétral conjugué de la direction : donc la droite (6), (7) est située dans ce plan diamétral et il reste à déterminer sa position dans ce plan.

Comme elle est indépendante du choix des axes, nous pouvons supposer que celui de y est parallèle à la droite $x=0$; $z=qy+r$, ce qui donne $q=0$, et prendre le plan diamétral conjugué de la direction pour celui des xz, ce qui réduit l'équation de la surface à la forme

$$\mathrm{A}x^2+\mathrm{A}'y^2+\mathrm{A}''z^2+\mathrm{B}'xz+\mathrm{C}x+\mathrm{C}''z+\mathrm{E}=0;$$

alors la droite, lieu géométrique des pôles, aura pour équations

$$y=0,\quad r\mathrm{F}'_z+\mathrm{C}x+\mathrm{C}''z+2\mathrm{E}=0.$$

La trace de la surface sur le plan des xz est une conique ayant pour équations

$$y=0;\quad \mathrm{A}x^2+\mathrm{A}''z^2+\mathrm{B}'xz+\mathrm{C}x+\mathrm{C}''z+\mathrm{E}=0.$$

La trace de la droite donnée sur le même plan est $x=0$; $y=0$; $z=r$; or la polaire de ce point par rapport à la courbe qui précède a pour équations

$$y=0;\quad r\mathrm{F}'_z+\mathrm{C}x+\mathrm{C}''z+2\mathrm{E}=0$$

qui sont précisément celles de la droite, lieu géométrique des pôles ; donc, *le lieu géométrique des pôles d'un système de plans qui se coupent suivant la même droite, est la polaire du point où la droite rencontre le plan diamétral conjugué de la direction*, la polaire *étant prise par rapport à la conique que le plan diamétral détermine sur la surface.* Nous verrons dans le § suivant que cette polaire est la droite suivant laquelle se couperaient tous les plans de contact, si le point

α, β, γ se déplaçait suivant la droite qui est l'intersection commune des plans, et nous pourrons alors énoncer plus simplement le théorème qui précède.

La considération de la constante q conduirait évidemment aux mêmes conclusions que celle de la constante p, et chacun des théorèmes qui précèdent aurait la réciproque dont il est facile de trouver l'énoncé.

4. Cherchons maintenant la position relative du pôle et du plan polaire. Comme elle est indépendante du choix des axes, nous pouvons les supposer tels que celui de z soit le diamètre passant par le pôle, et que le plan de xy soit tangent à la surface parallèlement au plan polaire. L'équation de la surface se réduira à la forme

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + C''z = 0;$$

l'ordonnée verticale du centre sera donnée par l'équation dérivée en z

$$2A''z + C'' = 0; \text{ d'où } z = -\frac{C''}{2A''}.$$

Cette ordonnée sera la longueur du demi-diamètre qui passe par le pôle; en la représentant par d on aura donc

$$d = -\frac{C''}{2A''}.$$

L'équation (8) du plan polaire deviendra

$$(2A''c + C'')z + C''c = 0; \quad \text{d'où } z = -\frac{C''c}{2A''c + C''},$$

z désignant la distance du plan polaire à l'origine. En appelant p la distance du plan polaire au centre, on aura donc

$$p = -\frac{C''c}{2A''c + C''} + \frac{C''}{2A''}, \text{ ou réduisant} : p = \frac{C''^2}{2A''(2A''c + C'')}.$$

La distance du pôle à l'origine étant c, en appelant p' la distance du pôle au centre, on aura

$$p' = c + \frac{C''}{2A''} \text{ ou } p' = \frac{2A''c + C''}{2A''}.$$

Et enfin, faisant le produit des deux distances p, p', on arrivera à la relation remarquable

$$p \times p' = d^2; \tag{9}$$

donc,

Dans les surfaces de deuxième ordre qui ont un centre, le pôle d'un plan est situé de manière que si l'on mène le diamètre qui passe par le pôle, le demi-diamètre est moyen proportionnel entre les distances du pôle et du plan au centre, les distances étant mesurées sur le diamètre.

Si la surface n'a pas de centre, on a de plus $A'' = 0$ et l'équation du plan polaire se réduit à $z = -c$, d'où résulte cette propriété du paraboloïde, analogue à celle de la parabole :

Dans tout paraboloïde, la partie du diamètre comprise entre un plan et son pôle a son milieu sur la surface.

Cette propriété et la relation (9) donnent un procédé très-simple pour construire, soit le plan polaire lorsque l'on connaît le pôle, soit le pôle lorsque l'on connaît le plan polaire pour chacune des cinq surfaces du deuxième ordre.

Dans le cas de la sphère, le diamètre est perpendiculaire au plan polaire, et la relation (9) a toujours lieu.

De ce qui précède résultent ces conséquences, qu'il suffira d'énoncer :

Le plan polaire étant extérieur à la surface, le pôle est intérieur et réciproquement.

Le plan s'éloignant du centre, le pôle s'en rapproche et réciproquement.

Le plan passant par le centre, le pôle est à l'infini et réciproquement.

Le plan étant tangent, le pôle est au point de contact, et réciproquement *si le pôle est sur la surface, le plan est tangent en ce point.*

5. L'équation (8) du plan polaire en y remplaçant F'_a, F'_b, F'_c par leurs valeurs et ordonnant par rapport à a, b, c devient

$$aF'_x + bF'_y + cF'_z + Cx + C'_y + C''_z + 2E = 0$$

en comparant cette équation avec (2) on voit que *le plan polaire d'un point est le plan de la courbe de contact qui correspond à ce point;* donc, *le pôle d'un plan est l'intersection commune des plans polaires de tous les points de ce plan.* Par conséquent, *si un point est dans un plan, son plan polaire passera par le pôle de ce plan.*

Réciproquement *le plan polaire d'un point est le lieu géométrique des pôles de tous les plans qui passent par ce point;* donc, *si un point passe par le pôle d'un autre plan, son pôle se trouvera sur cet autre plan* (3).

6. L'identité de l'équation du plan polaire d'un point avec celle du plan de contact qui correspond à ce point nous indique que le plan polaire est un lieu géométrique dont le plan de contact n'est qu'un cas particulier.

En effet, soit $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + Byz + B'xz + B''xy + Cx + C'y + C''z + E = 0$, l'équation générale des surfaces du deuxième ordre. Désignons par α, α' les segments compris sur l'axe des x entre l'origine et la surface. Ces segments sont donnés par l'équation du deuxième degré

$$Ax^2 + Cx + E = 0, \quad \text{d'où} \quad \alpha + \alpha' = -\frac{C}{A}; \quad \alpha\alpha' = \frac{E}{A};$$

de même β, β' désignant les segments compris sur l'axe des y, ces segments seront donnés par l'équation du deuxième degré

$$A'y^2 + C'y + E = 0, \quad \text{d'où} \quad \beta + \beta' = -\frac{C'}{A'}; \quad \beta\beta' = \frac{E}{A'}.$$

Enfin, γ, γ' désignant les segments sur l'axe des z, ces segments sont donnés par l'équation

$$A''z^2+C''z+E=0, \quad \text{d'où} \quad \gamma+\gamma'=-\frac{A''}{C''}, \; \gamma\gamma'=\frac{E}{A''}.$$

Prenons un segment sur chacun des axes, par exemple α sur l'axe des x, β sur celui des y, et γ sur celui des z. Le plan que déterminent ces trois segments a pour équation

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1.$$

Le plan qui détermine les trois autres segments α', β', γ' aurait de même pour équation

$$\frac{x}{\alpha'}+\frac{y}{\beta'}+\frac{z}{\gamma'}=1.$$

Ces deux plans se coupent suivant la même droite avec un troisième plan qui a pour équation la somme de leurs équations, c'est-à-dire :

$$\frac{\alpha+\alpha'}{\alpha\alpha'}x+\frac{\beta+\beta'}{\beta\beta'}y+\frac{\gamma+\gamma'}{\gamma\gamma'}z=2.$$

Or, en substituant en place de $\alpha+\alpha'$, $\beta+\beta'$, $\gamma+\gamma'$, $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, leurs valeurs de ci-dessus, l'équation de ce troisième plan devient

$$Cx+C'y+C''z+2E=0,$$

et l'équation (8) fait voir que ce deuxième plan est le plan polaire de l'origine; donc la position est indépendante de la direction des axes, et il en résulte ce théorème :

Si par un point fixe, on mène trois sécantes rencontrant une surface du deuxième ordre chacune en deux points, et si l'on prend un point d'intersection sur chaque sécante, le plan déterminé par ces trois points sera coupé par celui des autres points restants, suivant une droite qui sera toujours située dans un même plan lorsque l'on fera tourner les sécantes autour du point fixe, et ce plan sera le plan polaire du point fixe.

Donc, si parmi les sécantes trois peuvent devenir tangentes, les points de contact seront sur le plan polaire et en détermineront la position, ce qui explique l'identité de l'équation de ce plan avec celle du plan de contact.

On pourrait conclure de ce théorème un nouveau procédé pour construire, soit le plan polaire d'un point donné, soit le pôle d'un plan donné.

§ III.

1. Reprenons l'équation.

$$\alpha F'_x + \beta F'_y + \gamma F'_z + Cx + C'y + C''z + 2E = 0 \qquad (2)$$

de la courbe de contact qui correspond à un point quelconque α, β, γ de l'espace, et examinons le cas où le point α, β, γ est sur une droite quelconque

$$x = mz + g \quad (10) \qquad y = nz + h. \qquad (11)$$

On aura alors entre α, β, γ les deux relations

$$\alpha = m\gamma + g, \quad \beta = n\gamma + h,$$

et substituant ces valeurs de α, β dans (2), l'équation résultante

$$(mF'_x + nF'_y + F'_x)\gamma + gF'_m + hF'_x + Cx + C'y + C''_y + 2E = 0 \qquad (12)$$

sera l'équation générale de tous les plans de contact qui correspondraient aux divers points de la droite (10), (11).

Or la forme de l'équation (12) fait voir que tous les plans qu'elle représente se coupent suivant une même droite, car l'intersection de deux quelconques de ces plans serait celle des deux plans

$$mF'_x + nF'_y + F'_z = 0 \qquad (13)$$

$$gF'_x + hF'_y + Cx + C'y + C''z + 2E = 0 \qquad (14)$$

dont les équations sont indépendantes de la variable γ.

On sait que le plan conjugué de la direction

$$x = mz; \quad y = nz$$

qui est celle de la droite donnée (10), (11), est

$$mF'_x + nF'_y + F'_z = 0$$

équation du plan (13), donc la droite (13), (14) est dans ce plan, et il en résulte ce théorème.

Si l'on circonscrit à une surface du deuxième ordre une suite de surfaces coniques dont les sommets soient situés sur une même droite, les plans de toutes les courbes de contact se couperont suivant une autre droite qui sera située dans le plan diamétral conjugué de la direction de la première.

La droite (13), (14) a été appelée par M. Gergonne la *polaire* de la droite (10), (11). A une droite de l'espace correspond toujours une polaire dont on trouverait les équations en substituant dans (13), (14), en place de m, n, g, h, les constantes de cette droite.

2. Réciproquement, supposons que le point α, β, γ se meuve sur la droite (13), (14), ce qui donnera entre α, β, γ les relations

$$mF'_\alpha + nF'_\beta + F'_\gamma = 0 \quad gF'_\alpha + hF'_\beta + C\alpha + C'\beta + C''\gamma + 2E = 0.$$

L'équation générale des plans des diverses courbes de contact qui correspondraient aux divers points de la droite (13), (14), sera l'équation (2) que l'on peut mettre sous la forme

$$F'_\alpha x + F'_\beta y + F'_\gamma z + C\alpha + C'\beta + C''\gamma + 2E = 0 \qquad (2)$$

en y supposant α, β, γ liées entre elles par les deux relations qui précèdent. Or ces relations sont précisément celles qui expriment que le plan (2) contient la droite

$$x = mz + g \ (10) \quad y = nz + h \qquad (11)$$

donc, de même que tous les plans de contact qui correspondent aux divers points de la droite (10), (11) se coupent suivant la droite (13), (14), réciproquement tous les plans de contact qui correspondent aux divers points de la droite (13), (14) se coupent suivant la droite (10), (11), ce qui justifie la dénomination de *polaires conjuguées* donnée par M. Gergonne à ces deux droites.

3. La polaire conjuguée de la droite

$$x = mz + g \ (10) \quad y = nz + h \qquad (11)$$

a pour équation

$$mF'_x + nF'_y + F'_z = 0 \ (13)\,; \quad gF'_x + hF'_y + Cx + C'y + C''z + 2E = 0 \ (14)\,;$$

l'équation (13), ne contenant que les coefficients angulaires m, n de la droite (10) (11), est le lieu géométrique des positions de cette droite lorsque m et n restant constants on y fait varier g et h; mais alors la droite (10), (11) se meut parallèlement à elle-même, et (13) est le plan diamétral conjugué de la direction constante; donc

Les polaires d'un système de droites parallèles sont toutes situées dans le plan diamétral conjugué de leur direction commune, et nous pouvons en conclure que réciproquement :

Les polaires de toutes les droites situées dans un plan diamétral sont parallèles à la direction dont ce plan serait le conjugué.

L'équation (14) ne contient que les constantes g et h de la droite (10)(11), donc elle est le lieu de position de cette droite lorsque g et h restant constants, on y fait varier m et n. Mais alors la droite (10), (11) passe par le point fixe $x = g$, $y = hz$; $= 0$, et l'équation (14) est le plan polaire de ce point; ainsi

Les polaires d'un système de droites qui se coupent en un même point sont toutes situées dans le plan polaire de ce point, réciproquement, *et les polaires d'un système de droites qui sont situées dans un même plan passent toutes par le pôle de ce plan.*

4. Cherchons la position de la polaire conjuguée (13), (14) dans le plan diamétral (13). Comme cette position est indépendante du choix des axes, nous pouvons les supposer tels

que celui des z soit parallèle à la droite donnée (10), (11), ce qui exige que l'on ait $m=0$, $n=0$, et prendre pour plan des xy, ce plan diamétral conjugué de sa direction, ce qui réduit l'équation de la surface à la forme

$$Ax^2+A'y^2+A''r^2+B''xy+Cx+C'y+C''z+E=0.$$

Les équations de la polaire conjuguée (13) (14) sont dans ces hypothèses

$$z=0 \quad gF'x+hF'y+Cx+C'y+zE=0.$$

La trace de la surface sur le plan des xy est une conique

$$z=0, \quad Ax^2+A'y^2+B''xy+C+xC'y+E=0.$$

La trace de la droite donnée sur le même plan est un point

$$x=g, \quad y=h, \quad z=0$$

Or la polaire de ce point par rapport à la conique est :

$$z=0, \quad gF'x+hF'y+Cx+C'y+zE=0.$$

Donc elle coïncide avec la polaire conjuguée de la droite.

Ainsi : *La polaire conjuguée d'une droite de l'espace est la polaire du point où la droite rencontre le plan diamétral conjugué à sa direction, la polaire étant prise par rapport à la section que le plan diamétral détermine sur la surface.*

On voit par là que la polaire d'une droite de l'espace se ramène à la polaire d'un point d'un plan par rapport à une conique située dans ce plan.