EUGÈNE JUBÉ

Note sur le rapport de la circonférence au diamètre par la méthode des surfaces équivalentes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 7 (1848), p. 366-368

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1848_1_7__366_1>

NOTE

Sur le rapport de la circonférence au diamètre par la méthode des surfaces équivalentes (*V.* t. I, p. 192 et t. V, p. 42).

PAR M. JUBÉ (EUGÈNE),
Professeur au lycée de Saint-Omer.

—

En nommant R et r les rayons des cercles circonscrit et inscrit à un polygone régulier donné en surface, et R', r' ceux qui correspondent à un polygone régulier aussi équivalent au premier, mais dont le nombre des côtés est double, on a (Legendre, liv. IV, th. XVI) :

$$R' = \sqrt{rR}, \quad r' = \sqrt{r\frac{R+r}{2}}.$$

Si on applique ces formules au calcul des mêmes lignes relatives à des polygones réguliers de même surface dont les nombres de côtés s'accroissent toujours en doublant, après n opérations on arrivera à deux rayons R_n, r_n dont la différence pourra être aussi petite qu'on voudra.

En effet $R'^2-r'^2=\frac{r}{2}(R-r)$; d'où $R'-r'=\frac{r}{2(R'+r')}(R-r)$, mais $r'>r$ et $R'>r'$, donc $R'-r'<\frac{1}{4}(R-r)$: si R'' et r'' se rapportent à un nouveau polygone de même surface ayant encore deux fois plus de côtés, on aura semblablement $R''-r''<\frac{1}{4}(R'-r')$ et *à fortiori* $R''-r''<\frac{1}{4^2}(R-r)$; et enfin pour le polygone qui aura 2^n fois plus de côtés que le premier, $R_n-r_n<\frac{1}{4^n}(R-r)$. On pourra donc prendre n assez grand pour que R_n-r_n soit plus petit que toute quantité donnée.

Représentons par ρ le rayon du cercle équivalent à chacun des polygones considérés, alors $R_n>\rho>r_n$; donc la limite de R_n et de r_n est ρ.

Pour calculer ρ à moins de $\frac{1}{10^m}$ il suffira de trouver pour R_n-r_n une valeur moindre que $\frac{2}{10^m}$, car alors $R_n-\frac{R_n+r_n}{2}$ sera inférieur à $\frac{1}{10^m}$ de même que $\frac{R_n+r_n}{2}-r_n$, et par suite $\frac{R_n+r_n}{2}$ sera la valeur de ρ à moins de $\frac{1}{10^m}$.

On aura $R_n-r_n<\frac{2}{10^m}$, si on pose $\frac{1}{4^n}(R-r)<\frac{2}{10^m}$. Soit 4 la valeur commune du cercle et des polygones, et R, r, relatifs au carré ; alors $r=1$, $R=\sqrt{2}$; et en posant $\frac{1}{4^n}(\sqrt{2}-1)\overline{\overline{<}}\frac{2}{10^m}$ on a, en employant les log. ordinaires, $m+L(\sqrt{2}-1)\overline{\overline{<}}(1+2n)L2$; relation qui aura lieu *à for-*

tiori en prenant $m \overline{\overline{<}} (1+2n)\mathrm{L}2$ ou $n \overline{\overline{>}} \frac{m}{2-\mathrm{L}2} - \frac{1}{2}$. Mais $\mathrm{L}2 = 0{,}30103$, et $2\mathrm{L}2$ vaut $\frac{3}{5}$ à peu près; donc en prenant $n \overline{\overline{>}} \frac{5}{3}m - \frac{1}{2}$, $\frac{\mathrm{R}_n + r_n}{2}$ sera la valeur de ρ à moins de $\frac{1}{10^m}$, et le dernier polygone à considérer aura 4×2^n côtés.

Comme cette valeur de ρ est comprise entre 1 et 2, ρ^2 sera exprimé avec m chiffres décimaux exacts, et en divisant 4 par cette quantité on obtiendra π avec m chiffres décimaux exacts.

Cette méthode sera un peu moins avantageuse que celle des isopérimètres (t. V, p. 42).